

Problema 636. Solución de Nicolás Rosillo

Dado un triángulo ABC, hallar dos triángulos DEF y GHI tales que el simétrico de D respecto a E sea A, el simétrico de E respecto de F sea B y el simétrico de F respecto de D sea C y que el simétrico de G respecto a H sea A, el simétrico de H respecto de I sea C y el simétrico de I respecto de G sea B. Hallar los lados de los dos triángulos DEF y GHI en función de a, b y c, lados de ABC

Barroso, R (2012): Comunicación personal.

Solución desarrollada con Derive

Triángulo ABC de vértices genericos A(a,b), B(c,d) y C(e,f)

$$\#1: \text{lado1} := (c - a)^2 + (d - b)^2$$

$$\#2: \text{lado2} := (e - c)^2 + (f - d)^2$$

$$\#3: \text{lado3} := (e - a)^2 + (f - b)^2$$

Instrucción para calcular el simétrico de un punto (a,b) respecto a otro (p,q)

$$\#4: \text{simetricodepuntorespectopunto}(a, b, p, q) := 2 \cdot [p, q] - [a, b]$$

Obtención del triángulo DEF de vértices X(m,n), Y(p,q) y Z(r,s)

$$\#5: \text{simetricodepuntorespectopunto}(m, n, p, q) = [a, b]$$

$$\#6: [2 \cdot p - m = a, 2 \cdot q - n = b]$$

$$\#7: \text{simetricodepuntorespectopunto}(p, q, r, s) = [c, d]$$

$$\#8: [2 \cdot r - p = c, 2 \cdot s - q = d]$$

$$\#9: \text{simetricodepuntorespectopunto}(r, s, m, n) = [e, f]$$

$$\#10: [2 \cdot m - r = e, 2 \cdot n - s = f]$$

$$\#11: \text{SOLVE}(2 \cdot p - m = a \wedge 2 \cdot q - n = b \wedge 2 \cdot r - p = c \wedge 2 \cdot s - q = d \wedge 2 \cdot m - r = e \wedge 2 \cdot n - s = f, [m, n, p, q, r, s])$$

$$\#12: m = \frac{a + 2 \cdot c + 4 \cdot e}{7} \wedge n = \frac{b + 2 \cdot d + 4 \cdot f}{7} \wedge p = \frac{4 \cdot a + c + 2 \cdot e}{7} \wedge$$

$$q = \frac{4 \cdot b + d + 2 \cdot f}{7} \wedge r = \frac{2 \cdot a + 4 \cdot c + e}{7} \wedge s = \frac{2 \cdot b + 4 \cdot d + f}{7}$$

Vértices del triangulo DEF

$$\#13: x := \left[\frac{a + 2 \cdot c + 4 \cdot e}{7}, \frac{b + 2 \cdot d + 4 \cdot f}{7} \right]$$

$$\#14: y := \left[\frac{4 \cdot a + c + 2 \cdot e}{7}, \frac{4 \cdot b + d + 2 \cdot f}{7} \right]$$

$$\#15: z := \left[\frac{2 \cdot a + 4 \cdot c + e}{7}, \frac{2 \cdot b + 4 \cdot d + f}{7} \right]$$

Relaciones entre lados (utilizo distancias al cuadrado)

$$\#16: (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 - \left(\frac{3}{49} \cdot \text{lado1} - \frac{2}{49} \cdot \text{lado2} + \frac{6}{49} \cdot \text{lado3} \right)$$

$$\#17: 0$$

$$\#18: (z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2 - \left(-\frac{2}{49} \cdot \text{lado1} + \frac{6}{49} \cdot \text{lado2} + \frac{3}{49} \cdot \text{lado3} \right)$$

$$\#19: 0$$

$$\#20: (z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 - \left(\frac{6}{49} \cdot \text{lado1} + \frac{3}{49} \cdot \text{lado2} - \frac{2}{49} \cdot \text{lado3} \right)$$

$$\#21: 0$$

Obtención del triángulo GHI de vértices X(m,n), Y(p,q) y Z(r,s)

$$\#22: \text{simetricodepuntosrespectopunto}(m, n, p, q) = [a, b]$$

$$\#23: [2 \cdot p - m = a, 2 \cdot q - n = b]$$

$$\#24: \text{simetricodepuntosrespectopunto}(p, q, r, s) = [e, f]$$

$$\#25: [2 \cdot r - p = e, 2 \cdot s - q = f]$$

$$\#26: \text{simetricodepuntosrespectopunto}(r, s, m, n) = [c, d]$$

$$\#27: [2 \cdot m - r = c, 2 \cdot n - s = d]$$

$$\#28: \text{SOLVE}(2 \cdot p - m = a \wedge 2 \cdot q - n = b \wedge 2 \cdot r - p = e \wedge 2 \cdot s - q = f \wedge 2 \cdot m - r = c \wedge 2 \cdot n - s = d, [m, n, p, q, r, s])$$

$$\#29: m = \frac{a + 4 \cdot c + 2 \cdot e}{7} \wedge n = \frac{b + 4 \cdot d + 2 \cdot f}{7} \wedge p = \frac{4 \cdot a + 2 \cdot c + e}{7} \wedge q = \frac{4 \cdot b + 2 \cdot d + f}{7} \wedge r = \frac{2 \cdot a + c + 4 \cdot e}{7} \wedge s = \frac{2 \cdot b + d + 4 \cdot f}{7}$$

Vértices del triángulo GHI

$$\#30: x := \left[\frac{a + 4 \cdot c + 2 \cdot e}{7}, \frac{b + 4 \cdot d + 2 \cdot f}{7} \right]$$

$$\#31: y := \left[\frac{4 \cdot a + 2 \cdot c + e}{7}, \frac{4 \cdot b + 2 \cdot d + f}{7} \right]$$

$$\#32: z := \left[\frac{2 \cdot a + c + 4 \cdot e}{7}, \frac{2 \cdot b + d + 4 \cdot f}{7} \right]$$

Relaciones entre lados (utilizo distancias al cuadrado)

$$\#33: (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 - \left(\frac{6}{49} \cdot \text{lado1} - \frac{2}{49} \cdot \text{lado2} + \frac{3}{49} \cdot \text{lado3} \right)$$

$$\#34: 0$$

$$\#35: (z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2 - \left(\frac{3}{49} \cdot \text{lado1} + \frac{6}{49} \cdot \text{lado2} + - \frac{2}{49} \cdot \text{lado3} \right)$$

$$\#36: 0$$

$$\#37: (z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2 - \left(- \frac{2}{49} \cdot \text{lado1} + \frac{3}{49} \cdot \text{lado2} + \frac{6}{49} \cdot \text{lado3} \right)$$

$$\#38: 0$$