

Problema 636. Desarrollo adicional realizado por Nicolás Rosillo.

Dado un triángulo ABC, hallar dos triángulos DEF y GHI tales que el simétrico de D respecto a E sea A, el simétrico de E respecto de F sea B y el simétrico de F respecto de D sea C y que el simétrico de G respecto a H sea A, el simétrico de H respecto de I sea C y el simétrico de I respecto de G sea B. Hallar los lados de los dos triángulos DEF y GHI en función de a, b y c, lados de ABC

Barroso, R (2012): Comunicación personal.

Desarrollo adicional realizado con Derive.

Triángulo ABC de vértices genericos A(a,b), B(c,d) y C(e,f)

Vértices del triángulo original ABC (llamados de otra forma para evitar redundancias)

#1: o1 := [a, b]

#2: o2 := [c, d]

#3: o3 := [e, f]

#4: lado1 := $(c - a)^2 + (d - b)^2$

#5: lado2 := $(e - c)^2 + (f - d)^2$

#6: lado3 := $(e - a)^2 + (f - b)^2$

Vértices del triángulo DEF

#7: x := $\left[\frac{a + 2 \cdot c + 4 \cdot e}{7}, \frac{b + 2 \cdot d + 4 \cdot f}{7} \right]$

#8: y := $\left[\frac{4 \cdot a + c + 2 \cdot e}{7}, \frac{4 \cdot b + d + 2 \cdot f}{7} \right]$

#9: z := $\left[\frac{2 \cdot a + 4 \cdot c + e}{7}, \frac{2 \cdot b + 4 \cdot d + f}{7} \right]$

Vértices del triángulo GHI

#10: x := $\left[\frac{a + 4 \cdot c + 2 \cdot e}{7}, \frac{b + 4 \cdot d + 2 \cdot f}{7} \right]$

#11: y := $\left[\frac{4 \cdot a + 2 \cdot c + e}{7}, \frac{4 \cdot b + 2 \cdot d + f}{7} \right]$

#12: z := $\left[\frac{2 \cdot a + c + 4 \cdot e}{7}, \frac{2 \cdot b + d + 4 \cdot f}{7} \right]$

Relación entre area de los distintos triángulos

#13: AREATRIANGULOV(a, b, c) := $\frac{1}{2} \cdot \text{DET} \left[\begin{bmatrix} a & a & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ b & b & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ c & c & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \right]$

#14: $\frac{\text{AREATRIANGULOV}(o1, o2, o3)}{\text{AREATRIANGULOV}(x, y, z)}$

#15: $7 \cdot \text{SIGN}((a \cdot (d - f) + b \cdot (e - c) + c \cdot f - d \cdot e) \cdot (a \cdot (d - f) + b \cdot (e - c) + c \cdot f - d \cdot e))$

Relación entre las sumas de los lados al cuadrado

$$\begin{aligned} & \text{lado1} + \text{lado2} + \text{lado3} \quad \sim \\ \#16: & \frac{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (z_1 - x_1)^2 + (z_2 - x_2)^2 + (z_1 - y_1)^2 + (z_2 - y_2)^2}{2} \end{aligned}$$

#17: 7

Ambos triángulos poseen el mismo baricentro

$$\#18: \text{BARICENTROTRIANGULO}(a, b, c) := \left[\frac{a_1 + b_1 + c_1}{3}, \frac{a_2 + b_2 + c_2}{3} \right]$$

#19: BARICENTROTRIANGULO(o1, o2, o3)

$$\#20: \left[\frac{a + c + e}{3}, \frac{b + d + f}{3} \right]$$

#21: BARICENTROTRIANGULO(x, y, z)

$$\#22: \left[\frac{a + c + e}{3}, \frac{b + d + f}{3} \right]$$