

Dado un triángulo equilátero ABC , se traza la circunferencia inscrita que será tangente en A' , B' y C' a BC , AC y AB respectivamente. Sea S_1 el área que delimitan el arco menor $A'B'$ de la inscrita, y los segmentos $A'C$ y $B'C$. Sea S_2 el área que delimitan el arco menor de AB de la circunscrita y el lado AB . Sea S_3 el área de la circunferencia inscrita (del círculo inscrito, añadido el 19 de febrero). Demostrar que $S_1 + S_2 = S_3$.

McCartin, B. J. (2010) [Mysteries of the equilateral triangle](#). Hikari LTD (p. 30)

Sugerencia del director: Investigar qué características debe tener un triángulo para tener tal propiedad. Distinguir los casos posibles:

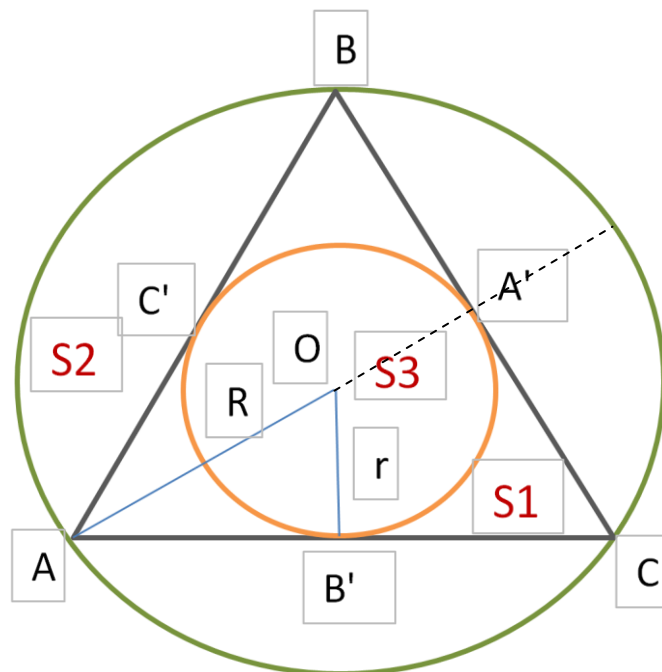
637 a) Isósceles en C

637 b) Isósceles en A

637 c) Escaleno.

Solución de Luis Mello, Estudiante Lic. en Matemáticas y Física

Universidad Nacional Concepción - Paraguay



Sea O , el centro del círculo inscrito de radio r y el centro del círculo circunscrito de radio R .

$AB=BC=CA=\ell$ (Triángulo Equilátero)

Podemos afirmar que A' , B' y C' son puntos medios de los lados BC , AC y AB respectivamente, atendiendo que "Todo diámetro perpendicular a una cuerda divide a esta y a los arcos

subtendidos en partes iguales". También que la relación entre el lado del triángulo equilátero y el radio de la circunferencia circunscripta es: $\ell = R \sqrt{3}$ (1)

Luego tenemos, por Pitágoras:

$$(\ell/2)^2 + r^2 = R^2 \quad \text{reemplazando de (1) se tiene}$$

$$\frac{3}{4} R^2 + r^2 = R^2 \quad \text{Luego} \quad R^2 = 4 r^2$$

$$\text{O sea} \quad R = 2r \quad \text{..... (2)}$$

COMO:

$$S_1 = \frac{A\Delta - S_3}{3} \quad \text{Donde: } A\Delta = \text{area del triángulo}$$

$$S_2 = \frac{A\bullet - A\Delta}{3} \quad \text{Donde: } A\bullet = \text{area del círculo circunscripto}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{A\Delta - S_3}{3} + \frac{A\bullet - A\Delta}{3} = \frac{A\bullet - S_3}{3} \quad \text{....(3)}$$

$$\text{pero } S_3 = \pi r^2 \quad \text{y} \quad A\bullet = \pi R^2$$

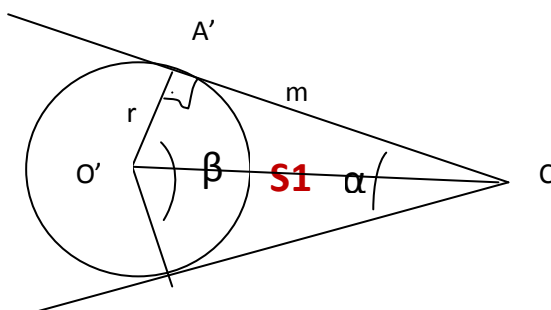
Luego en (3):

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi R^2 - \pi r^2}{3} \quad \text{reemplazando de (2)}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi(2r)^2 - \pi r^2}{3} = \frac{3\pi r^2}{3} = \pi r^2 \quad \underline{\text{que es igual a } S_3}$$

*****ANÁLISIS ALTERNATIVO*****

Analizamos el caso desde el punto de vista del ángulo $C = \alpha$. Atendiendo que sustenta el área S_1 y S_2 .



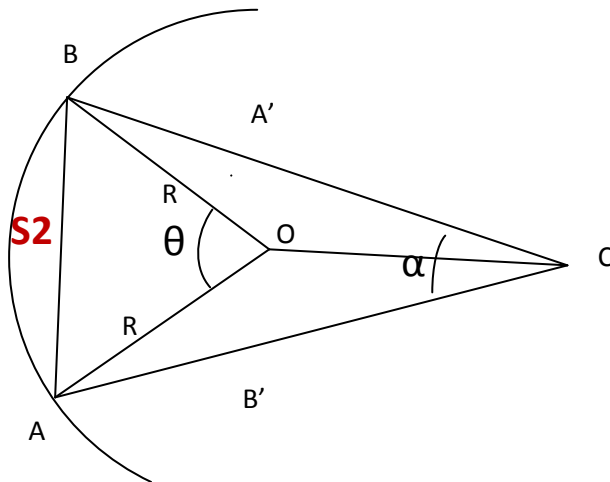


Ambos triángulos son rectángulos e iguales:

$$\text{El área de } CO'A' = CO'B' = \frac{mr}{2} = \frac{r^2}{2 \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})} \quad \text{Donde: } m = \frac{r}{\operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})}$$

$$\text{El área del sector circular} = \frac{r^2 \beta}{2} = \frac{r^2 (\pi - \alpha)}{2} \quad \text{Donde: } \pi/2 = \beta/2 + \alpha/2$$

$$\text{Luego } S1 = 2 \frac{r^2}{2 \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})} - \frac{r^2 (\pi - \alpha)}{2} = \frac{r^2}{\operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})} - \frac{r^2 (\pi - \alpha)}{2} \quad \dots (1)$$



A partir de la fig. Podemos decir que el área del segmento circular es

$$S2 = \frac{R^2 (\theta - \sin \theta)}{2} \quad \text{pero : } \theta = 2\alpha$$

$$S2 = \frac{R^2 (2\alpha - \sin 2\alpha)}{2} = R^2 \alpha - \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2} \quad \dots (2)$$

Luego de (1) y (2) para que se verifique la igualdad: $S1 + S2 = S3$

$$\frac{r^2}{\operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})} - \frac{r^2 (\pi - \alpha)}{2} + R^2 \alpha - \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2} = \pi r^2 \quad \dots (3)$$

Para ello debemos verificar que:

$$\frac{r^2}{\operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2})} - \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2} = 0 \quad \dots (4)$$

$$R^2 \alpha - \frac{r^2(\pi - \alpha)}{2} = \pi r^2 \dots\dots\dots (5))$$

De (4) se tiene:

$$r^2 = \frac{R^2 \operatorname{tg}(\frac{\alpha}{2}) \sin 2\alpha}{2} = \frac{R^2 (1 - \cos \alpha)}{2} \dots\dots\dots (6)$$

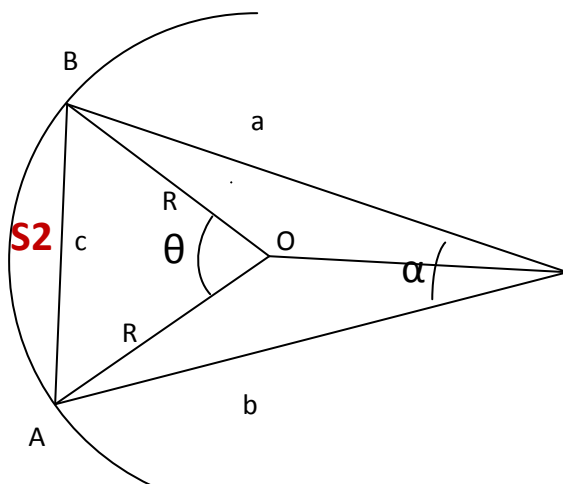
Luego (6) en (5)

$$\frac{2r^2 \alpha}{(1 - \cos \alpha)} - \frac{r^2(\pi - \alpha)}{2} = \pi r^2$$

$$\frac{2\alpha}{(1 - \cos \alpha)} - \frac{(\pi - \alpha)}{2} = \pi$$

Lo cual nos da:

$$\cos \alpha = \frac{3\pi - 5\alpha}{3\pi - \alpha} \dots\dots\dots (7)$$



Pero debemos apuntar que por Teorema del Coseno:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \dots\dots\dots (8)$$

*CASO TRIANGULO EQUILATERO

$$a = b = c$$

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2}$$

$$\text{En (7)} \quad \cos \alpha = \frac{3\pi - 5\alpha}{3\pi - \alpha} = \frac{1}{2} \implies \alpha = \frac{\pi}{3} = 60^\circ \text{ (equilátero)}$$

Ciertamente también podemos verificar en (6) que:

$$r^2 = \frac{R^2 (1 - \cos \alpha)}{2} \qquad r^2 = \frac{R^2 (1 - 1/2)}{2}$$

$$r^2 = \frac{R^2}{4} \implies R = 2r \quad (\text{relaci3n que hab3amos encontrado anteriormente})$$

Los cuales reemplazando en (3) verifica perfectamente **S1+S2=S3**

- ISOCELES EN C

$a = b \neq c$; de (7)

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{2a^2 - c^2}{2a^2} = \frac{3\pi - 5\alpha}{3\pi - \alpha}$$

$$1 - \frac{c^2}{2a^2} = \frac{3\pi - 5\alpha}{3\pi - \alpha} \qquad \frac{c^2}{a^2} = \frac{8\alpha}{3\pi - \alpha}$$

Luego tambi3n

$$\text{De (6)} \quad \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \qquad \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{c^2}{4a^2} \qquad \frac{r}{R} = \frac{c}{2a}$$