Problema 639

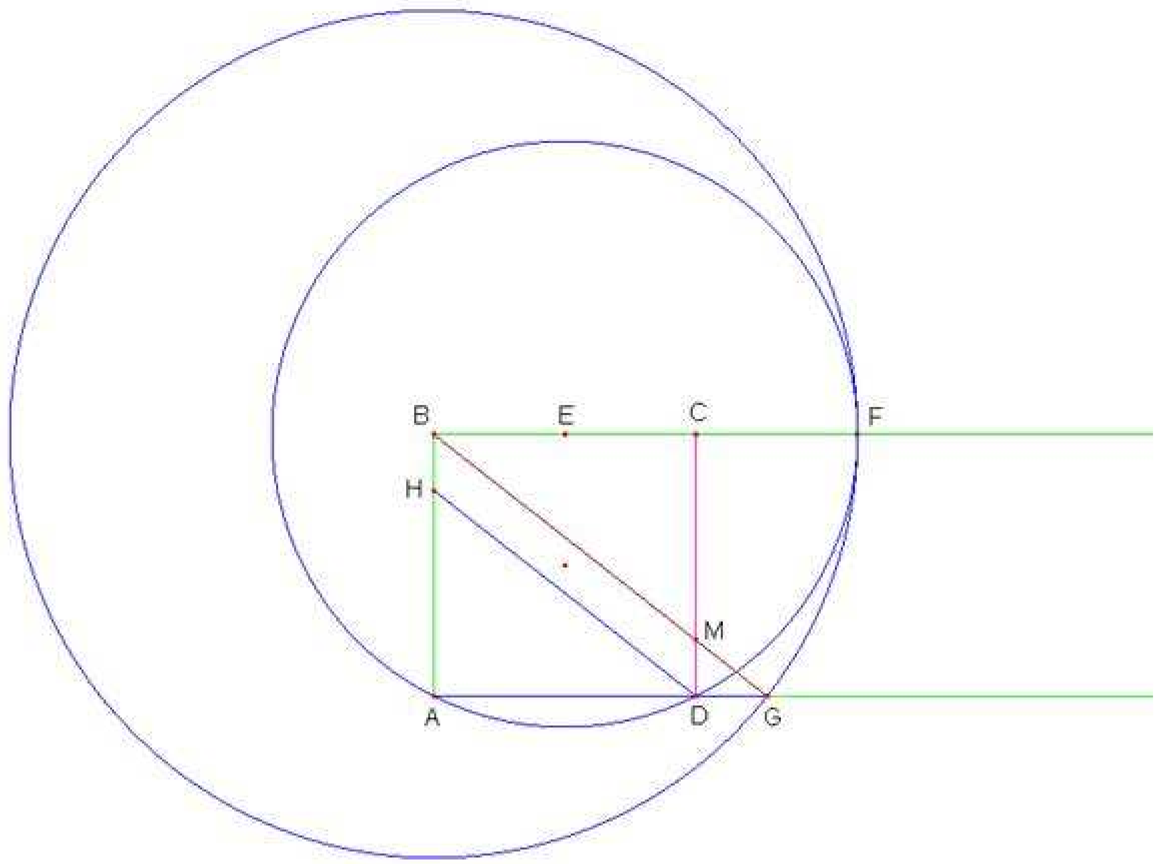
Sea un cuadrado ABCD. Sea E el punto medio de BC. Tracemos la circunferencia de centro E y radio ED. Cortará a la semirrecta BC prolongada por C en F. Tracemos la circunferencia de centro B y radio BF. Cortará a la semirrecta AD prolongada por D en G. El triángulo ABG se denomina de Kepler. Hallar la relación con el número de oro.

Tracemos por D una paralela a GB que cortará al segmento AB en H. Demostrar que los triángulos ABG y AHD tienen cinco elementos iguales (tres ángulos y dos lados).

Askew, M. y Ebbutt, S. (2010): Petit Précis de Géométrie à déguster. (pur les curieux qui voulent tout comprendre) De Pythagorea la conquête spatiale : l'ABC dela Géométrie. Belin (p. 67, ligeramente adaptada)

Solución de Inocencio Esquivel García, docente de Matemáticas del Instituto

Técnico Patios Centro No. 2 Los Patios N.S. Colombia.



ED = EF

$$EF^2 = CD^2 + \left(\frac{CD}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}CD^2 \quad Luego\ EF = \frac{\sqrt{5}}{2}CD$$

$$BG = BF = BE + EF = \frac{CD}{2} + \frac{\sqrt{5}\,CD}{2} = \frac{CD}{2}(1 + \sqrt{5})$$

Que corresponde al número de oro

Para Demostrar que los triángulos ABG y AHD tienen cinco elementos iguales (tres ángulos y dos lados).

LOS 3 ÁNGULOS

a. El ángulo A es común a los 2 triángulos

b. Las rectas HD y BG son paralelas cortadas por (secante) en este caso por la recta AB y por la recta AG. Por tanto el ángulo AHD = ángulo ABG.

c. De la misma manera ángulo ADH = ángulo AGB

Por ser cuadrado AB = AD

Falta demostrar que HD = AG

$$BG^2 = CD^2 + (CD + DG)^2 = \frac{CD^2}{4}(1 + \sqrt{5})^2 \ \ despejando\ DG\ tenemos$$

$$DG = \frac{CD}{2}\left[\sqrt{(1 + \sqrt{5})^2 - 4} \ - 2\right]$$

$$\text{tenemos que} \tan G = \frac{CD}{CD + DG} = \frac{DM}{DG} \ \ \text{De donde se tiene que} \ \ DM = \frac{CD.DG}{CD + DG}$$

Remplazando el valor de DG en la anterior ecuación llegamos a

$$DM = CD\left[\frac{\sqrt{(1 + \sqrt{5})^2 - 4} \ - 2}{\sqrt{(1 + \sqrt{5})^2 - 4}}\right] \ \ Como\ DM = BH \ \ entonces$$

$$AH = CD - CD\left[\frac{\sqrt{(1 + \sqrt{5})^2 - 4} \ - 2}{\sqrt{(1 + \sqrt{5})^2 - 4}}\right] = CD\left[\frac{2}{\sqrt{(1 + \sqrt{5})^2 - 4}}\right]$$

Aplicamos el T. Pitágoras y obtenemos que HD

$$HD^2 = CD^2 + CD^2\left[\frac{4}{(1+\sqrt{5})^2 - 4}\right]$$

$$HD = \frac{CD\,(1+\sqrt{5})}{\sqrt{(1+\sqrt{5})^2 - 4}} = \frac{CD}{2}\sqrt{(1+\sqrt{5})^2 - 4} \qquad (1)$$

Por otro lado tenemos que AG = AD + DG = CD + DG

$$AG = CD + \frac{CD}{2}\left[\sqrt{(1+\sqrt{5})^2 - 4} - 2\right] = CD\left[1 + \frac{1}{2}\sqrt{(1+\sqrt{5})^2 - 4} - 1\right]$$

$$AG = \frac{CD}{2}\sqrt{(1+\sqrt{5})^2 - 4} \qquad (2)$$

De (1) y (2) vemos que efectivamente AG = HD.