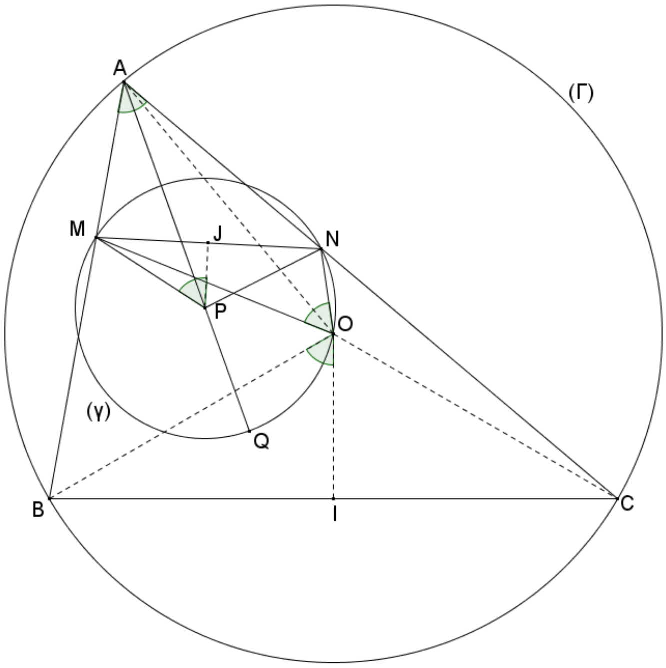
Problema n°641

Propuesto por Mario Garcia Armas,(Canadá) y Roberto Bosch Cabrera, (EE.UU)
Sea ABC un triángulo con circuncentro O. Sean M y N puntos sobre AB y AC respectivamente tal que <A = <MON. Demostrar que AM + AN +MN ≥ BC.
García, M. y Bosch, R (2012): Comunicación personal.

Solution proposée par Philippe Fondanaiche
Soit $\alpha = \angle BAC$. On trace le cercle (γ) de centre P qui est circonscrit au triangle MON. La demi-droite issue de A passant par P coupe ce cercle en un point Q extérieur au segment AP.
On en déduit $AO \leq AQ = AP + PQ = AP + PM$. (1)
Par ailleurs $\angle BOC = 2\angle BAC = 2\alpha$.Soit I le milieu du côté BC.D'où $AO = BO = BI/\sin(\alpha) = BC/2\sin(\alpha)$ (2)
De la même manière on a $\angle MPN = 2\angle MON = 2\alpha$. Soit J le milieu du côté MN. D'où $PM = PN = MJ/\sin(\alpha) = MN/2\sin(\alpha)$ (3)



L'inégalité de Ptolémée qui porte sur les distances entre les quatre points A,M,P,N permet d'écrire:
$AP*MN \leq AM*PN + AN*PM = (AM + AN)*PM = (AM + AN)*MN/2\sin(\alpha)$.
D'où $AP \leq (AM + AN)/2\sin(\alpha)$ (4)
En combinant les inégalités (1) et (4) et les égalités (2) et (3),on obtient :
$AO = BC/2\sin(\alpha) \leq AQ = AP + PM \leq (AM + AN)/2\sin(\alpha) + MN/2\sin(\alpha) = (AM + AN + MN)/2\sin(\alpha)$.
D'où l'inégalité demandée: AM + AN + MN ≥ BC.
On vérifie aisément que l'égalité est satisfaite si et seulement si le triangle ABC est équilatéral.