

Problema 643 de triángulos cabri. (1) Sea ABC un triángulo. Sea la recta BC . Sea D un punto genérico de BC . Consideremos el segmento AD , y sea DU tal que $DU = DA$, con DU perpendicular a BC , Hallar el lugar geométrico de U cuando D recorre BC .

(2) Sea ABC un triángulo. Sea la recta BC . Sea D un punto genérico de BC . Consideremos el segmento AD , y sea DU tal que $DU = DA$, siendo constante el ángulo DU con BC . Hallar el lugar geométrico de U cuando D recorre BC .

Propuesto por Milton Favio Donaire y Ricardo Barroso Campos.

Solución de Francisco Javier García Capitán

Usaremos coordenadas cartesianas y responderemos directamente a la segunda cuestión, que generaliza la primera. Supongamos que $A = (0, v)$, $B = (-m, 0)$ y $C = (n, 0)$, de manera que $E = (0, 0)$ es el pie de la altura trazada por A . Si $D = (t, 0)$, tenemos que $AD^2 = t^2 + v^2$ y si la recta DU forma un ángulo θ con la horizontal tendremos que las coordenadas de (x, y) de U cumplen $(x, y) = (t, 0) \pm \sqrt{t^2 + v^2}(\cos \theta, \sin \theta)$. Eliminando t obtenemos que el punto U describe la curva

$$\sin \theta (x^2 - y^2 + v^2) = 2xy \cos \theta,$$

que es el resultado de aplicar un giro de centro el origen y amplitud $\frac{\theta}{2}$ a la hipérbola equilátera

$$xy = \frac{v^2 \sin^2 \theta}{2}.$$