

Problema 643

a) Siga $\triangle ABC$ un triangle. Siga la recta BC. Siga D un punt genèric de la recta BC. Considerem el segment $\overline{AD}$ i siga $\overline{DU}$ tal que $\overline{DU} = \overline{DA}$ amb $\overline{DU}$ perpendicular a BC. Determineu el lloc geomètric de U quan D recorre la recta BC.

b) Siga $\triangle ABC$ un triangle. Siga la recta BC. Siga D un punt genèric de la recta BC. Considerem el segment $\overline{AD}$ i siga $\overline{DU}$ tal que $\overline{DU} = \overline{DA}$ essent l'angle $\overline{DU}$ amb BC constant. Determineu el lloc geomètric de U quan D recorre la recta BC.

Donaire, M.F. , Barroso, R. (2012): Comunicació personal.

Solució:

Considerem el triangle $\triangle ABC$ amb les següents coordenades:

$A(b,c)$, $B(0,0)$, $C(a,0)$.

Siga $D(x,0)$ un punt genèric de la recta BC.

$$\overline{AD} = \sqrt{(x-b)^2 + c^2}.$$

a)

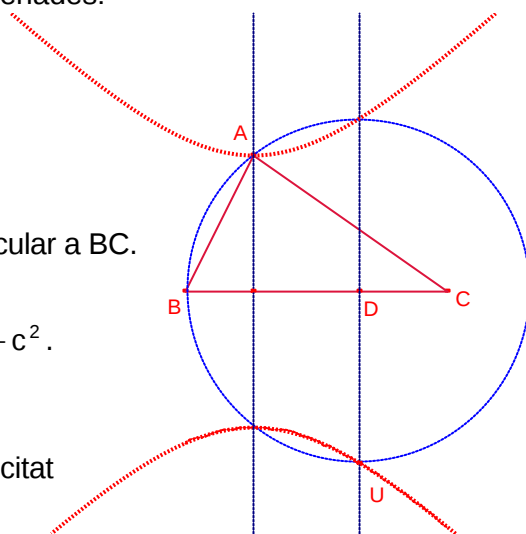
$U(x,y)$ el punt U tal que $\overline{DU} = \overline{DA}$ amb $\overline{DU}$ perpendicular a BC.

Com que $\overline{DU} = \overline{DA}$, aleshores:

$$y = \sqrt{(x-b)^2 + c^2}. \text{ Elevant al quadrat: } y^2 = (x-b)^2 + c^2.$$

$$-\frac{(x-b)^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1.$$

És una hipèrbola equilàtera, de centre $(b,0)$ i excentricitat $\sqrt{2}$.



b)

Siga $D(d,0)$ un punt genèric de la recta BC.

$$\overline{AD} = \sqrt{(d-b)^2 + c^2}$$

$U(x,y)$ el punt U tal que $\overline{DU} = \overline{DA}$ essent $\alpha = \angle BDU$ constant.

$$\overline{DP} = \cos \alpha \cdot \sqrt{(d-b)^2 + c^2}.$$

$$\overline{PU} = \sin \alpha \cdot \sqrt{(d-b)^2 + c^2}.$$

Les coordenades del punt U són:

$$U(x,y) = \left(d - \cos \alpha \cdot \sqrt{(d-b)^2 + c^2}, -\sin \alpha \cdot \sqrt{(d-b)^2 + c^2} \right)$$

$$x = d + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} y. \text{ Aleshores, } d = x - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} y$$

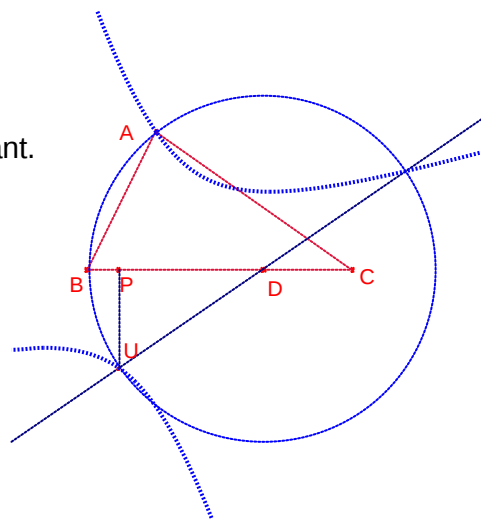
$$y = -\sin \alpha \sqrt{\left(x - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} y - b \right)^2 + c^2}.$$

Elevant al quadrat:

$$\sin^2 \alpha \cdot x^2 - \sin^2 \alpha \cdot y^2 - 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot xy - 2b \cdot \sin^2 \alpha \cdot x + 2b \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot y + (b^2 + c^2) \sin^2 \alpha = 0$$

$$\sin \alpha \cdot x^2 - \sin \alpha \cdot y^2 - 2 \cos \alpha \cdot xy - 2b \cdot \sin \alpha \cdot x + 2b \cdot \cos \alpha \cdot y + (b^2 + c^2) \sin \alpha = 0.$$

La matriu de la cònica és:



$$A = \begin{pmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha & -b \cdot \sin \alpha \\ -\cos \alpha & -\sin \alpha & b \cdot \cos \alpha \\ -b \sin \alpha & b \cdot \cos \alpha & (b^2 + c^2) \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$|A| = -c^2 \cdot \sin^3 \alpha < 0.$$

És una hipèrbola equilàtera.