Problema 643

Sea ABC un triángulo. Sea la recta BC. Sea D un punto genérico de BC. Consideremos el segmento AD, y sea DU tal que DU =DA, con DU perpendicular a BC, Hallar el lugar geométrico de U cuando D recore BC.

Sea ABC un triángulo. Sea la recta BC. Sea D un punto genérico de BC. Consideremos el segmento AD, y sea DU tal que DU =DA, siendo constante el ángulo DU con BC. Hallar el lugar geométrico de U cuando D recore BC.

Donaire, M.F. , Barroso, R. (2012): Comunicación personal.

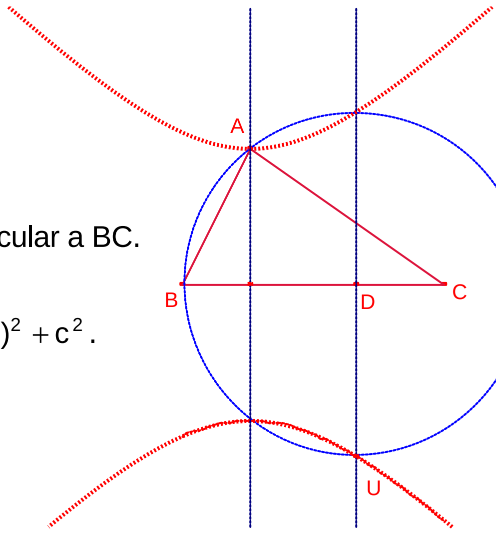
El profesor Donaire tiene una página web en Forogeometras

Solución de Ricard Peiró:

Consideremos el triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ en las siguientes coordenadas:
$A(b,c)$, $B(0,0)$, $C(a,0)$.

Sea $D(x,0)$ un punto genérico de la recta BC.

$\overline{AD}=\sqrt{(x-b)^2+c^2}$.



a)

$U(x,y)$ el punto U tal que $\overline{DU}=\overline{DA}$ con $\overline{DU}$ perpendicular a BC.

Como $\overline{DU}=\overline{DA}$, entonces:

$y=\sqrt{(x-b)^2+c^2}$. Elevando al cuadrado: $y^2=(x-b)^2+c^2$.

$$-\frac{(x-b)^2}{c^2}+\frac{y^2}{c^2}=1.$$

Es una hipérbola equilátera, de centro $(b,0)$ y excentricidad $\sqrt{2}$.

b)

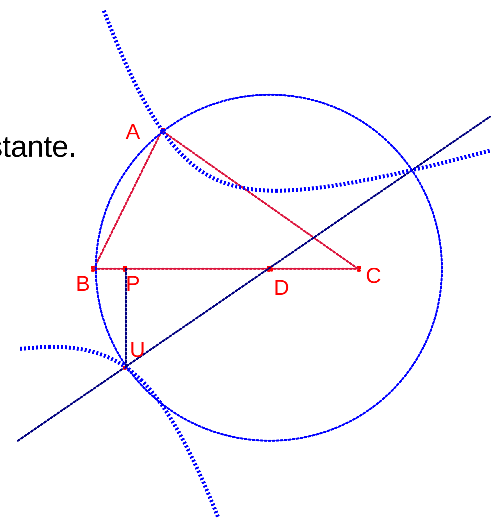
Siga $D(d,0)$ un punto genérico de la recta BC.

$\overline{AD}=\sqrt{(d-b)^2+c^2}$

$U(x,y)$ el punto U tal que $\overline{DU}=\overline{DA}$ siendo $\alpha=\angle BDU$ constante.

$\overline{DP}=\cos\alpha\cdot\sqrt{(d-b)^2+c^2}$.

$\overline{PU}=\sin\alpha\cdot\sqrt{(d-b)^2+c^2}$.



Las coordenadas del punto U son:

$$U(x,y)=\left(d-\cos\alpha\cdot\sqrt{(d-b)^2+c^2},-\sin\alpha\cdot\sqrt{(d-b)^2+c^2}\right)$$

$x=d+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}y$. Entonces, $d=x-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}y$

$$y=-\sin\alpha\sqrt{\left(x-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}y-b\right)^2+c^2}.$$

Elevando al cuadrado:

$$\sin^2\alpha\cdot x^2-\sin^2\alpha\cdot y^2-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot xy-2b\cdot\sin^2\alpha\cdot x+2b\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot y+(b^2+c^2)\sin^2\alpha=0$$

$$\sin\alpha\cdot x^2-\sin\alpha\cdot y^2-2\cos\alpha\cdot xy-2b\cdot\sin\alpha\cdot x+2b\cdot\cos\alpha\cdot y+(b^2+c^2)\sin\alpha=0.$$

La matriz de la cónica es:

$$A=\begin{pmatrix}\sin\alpha & -\cos\alpha & -b\cdot\sin\alpha\\ -\cos\alpha & -\sin\alpha & b\cdot\cos\alpha\\ -b\sin\alpha & b\cdot\cos\alpha & (b^2+c^2)\sin\alpha\end{pmatrix}$$

$|A|=-c^2\cdot\sin^3\alpha<0$.

Es una hipérbola equilátera.