

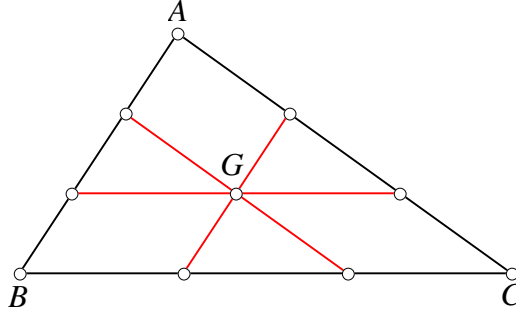
**Problema 649 de triángulos cabri.** Sea  $ABC$  un triángulo. Encontrar los puntos  $P$  del plano  $ABC$  tales que las áreas  $PAB$ ,  $PAC$  y  $PBC$  en cualquier orden sean una progresión aritmética.

Propuesto por Ramón Trigueros Reina.

*Solución de Francisco Javier García Capitán*

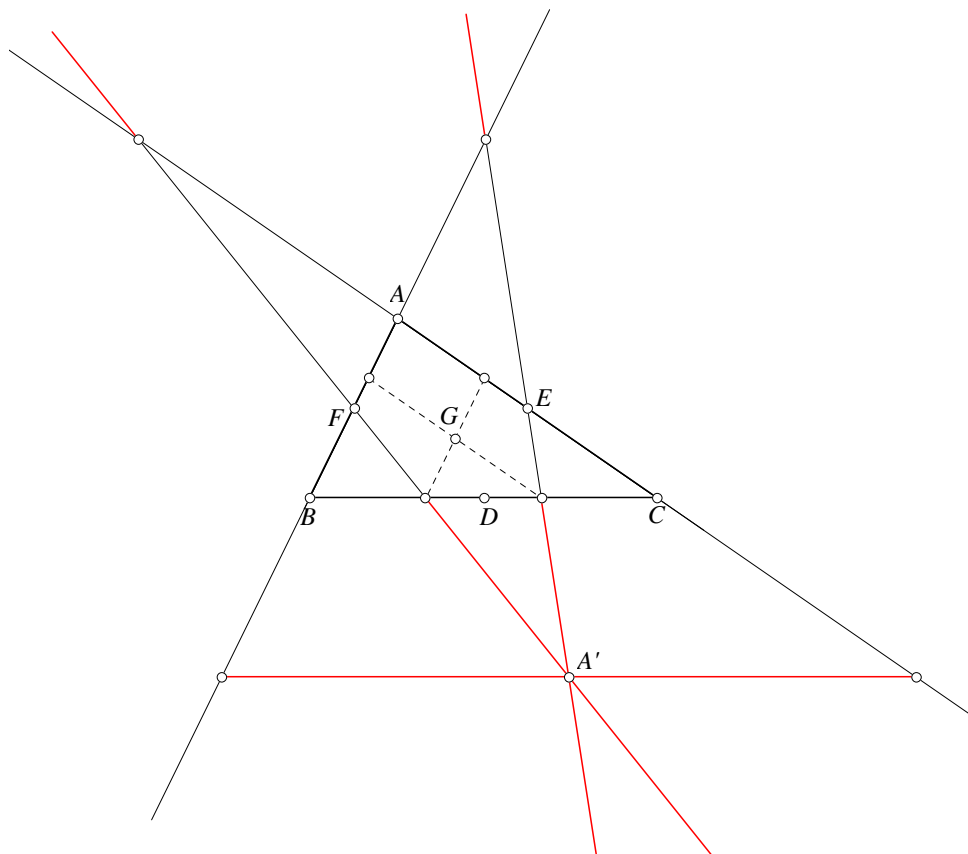
Si  $(x : y : z)$  son las coordenadas baricéntricas de un punto  $P$ , sabemos que  $x : y : z = (PBC) : (PCA) : (PAB)$  donde  $(XYZ)$  representa el área con signo del triángulo  $XYZ$ , es decir  $(XYZ)$  es positivo o negativo según  $XYZ$  tenga o no la misma orientación que  $ABC$ . En el enunciado las áreas  $PAB$ ,  $PAC$  y  $PBC$  se enumeran en cierto orden alfabético, por lo que suponemos que se consideran áreas positivas.

Si  $P$  es interior al triángulo  $ABC$ , se cumple que  $PBC : PCA : PAB = x : y : z$  y dichas áreas estarán en progresión aritmética si y solo si  $P$  está sobre alguna de las rectas  $2x = y + z$ ,  $2y = z + x$ ,  $2z = x + y$ . La recta  $2x = y + z$ , que pasa por los puntos  $G = (1 : 1 : 1)$ , baricentro del triángulo  $ABC$ , y  $(0 : -1 : 1)$ , punto del infinito de la recta  $BC$ , es la paralela por  $G$  a la recta  $BC$ , por lo que  $P$  deberá estar sobre el segmento de dicha recta cuyos puntos son interiores al triángulo.



Supongamos ahora que  $P$  es exterior al triángulo, pero que es interior al ángulo formado por las semirrectas  $AB$  y  $AC$ , o bien al ángulo opuesto a éste por el vértice  $A$ . En ese caso tenemos que  $PBC : PAC : PAB = -x : y : z$ . Entonces el punto  $P$  deberá estar sobre alguna de las rectas  $-2x = y + z$ ,  $2y = -x + z$  o  $2z = -x + y$ .

En la figura de la página siguiente están representadas estas tres rectas. Sean  $D, E, F$  los puntos medios de los lados  $BC, CA, AB$ , respectivamente. Si  $A'$  es el punto simétrico de  $A$  respecto de  $D$ , se tiene que  $A' = (-1 : 1 : 1)$  está sobre la recta  $-2x = y + z$ , y esta recta también contiene al punto infinito  $(0 : -1 : 1)$ , por lo que esta recta es la paralela a  $BC$  por  $A'$ .



Las otras dos rectas  $2y = -x + z$  y  $2z = -x + y$  también pasan por  $A'$ : son las rectas  $A'E$  y  $A'F$ , como es fácil de comprobar.

Otras soluciones similares se encontrarán en las regiones correspondientes a los ángulos  $B$  y  $C$ . La figura siguiente muestra todas las soluciones del problema.

Merece mencionar que los segmentos y semirrectas obtenidos se continúan unos con otros en la figura, en relación con que la condición del enunciado se expresa mediante una función continua.

