

Problema nº 649

Ramón Trigueros Reina

Delimitemos el problema en tres regiones que presentan diferencias notables.

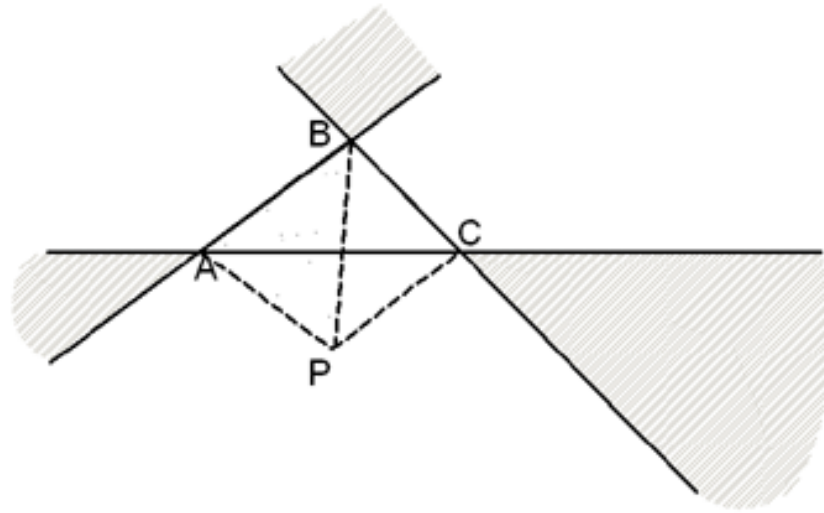
- A)** Puntos interiores al triángulo. Las progresiones las consideraremos siempre crecientes, la diferencia $d \geq 0$.

En este caso $[PAB] + [PAC] + [PBC] = 3A_2 = [ABC]$.

Siendo A_2 el segundo término de la progresión que puede recaer sobre cualquiera de los tres triángulos. Supongamos por tanto $[PAB] = A_2 \implies [PAB] = [ABC]/3$. y por lo tanto la altura del triángulo $[PAB]$ debe de ser $1/3$ de la altura del triángulo sobre el lado AB. Así P debe de estar en un segmento paralelo a AB a $1/3$ de la altura del triángulo. Pero además todos los puntos de este segmento generan triángulos cuyas áreas están en progresión aritmética pues $[PAC] + [PBC] = 2[ABC]/3$ y obviamente $[PAB] = [ABC]/3$.

Análogamente ocurriría con la consideración de $[PAC] = A_2$ o $[PBC] = A_2$. El resultado sería tres segmentos paralelos a los lados a $1/3$ de la altura del triángulo sobre cada lado. Los tres segmentos se cortan en el baricentro del triángulo.

- B)** Centremosnos en las regiones no acotadas limitadas por las prolongaciones de los lados y alguno de los lados, por ejemplo el lado AC:



Vamos a desglosar el problema en tres posibilidades:

Triángulo original $[ABC]$; $[PAB]$; $[PAC]$ y $[PBC]$. Puesto que estamos considerando la región limitada por el lado AC , nos centraremos en el triángulo $[PAC]$.

Las posibilidades para este triángulo son que sea el primer término de la progresión A_1 , que sea el segundo A_2 y que sea el terero A_3 . A continuación estudiamos cada una de estas posibilidades:

1. $[PAC] = A_1$. Puesto que queremos que las áreas de los triángulos estén en progresión aritmética, se ha de verificar $A_1 + A_2 + A_3 = 3A_2$

$$A_1 + A_2 + A_3 = [ABC] + 2A_1 = 3A_2 \implies [ABC] = A_2 + 2(A_2 - A_1) = A_4$$

Obtenemos por tanto $A_1 = [ABC] - 3d$; $A_2 = [ABC] - 2d$ y $A_3 = [ABC] - d$

Donde d (diferencia de la progresión) va a ser un prámetro variable y vamos a estudiar su dominio de variación. Para

simplificar los cálculos $[ABC] = S$.

$$A_1 \geq 0 \implies S - 3d \geq 0 \implies 0 \leq d \leq 1/3S$$

Sin pérdida de generalidad podemos definir las coordenadas de cada punto como las distancias a los lados AB y BC (fijos). Como el área del triángulo $PAB = A_2$ (análogo para $PBC = A_3$) es $S - 2d$, la altura del triángulo es $h_1(d) = \frac{2}{AB} \cdot (S - 2d)$. El triángulo $PBC = A_3$ tendría como altura $h_2(d) = \frac{2}{BC} \cdot (S - d)$. Las coordenadas del punto P en relación con los lados del triángulo son

$$\left(\frac{2}{AB} \cdot (S - 2d), \frac{2}{BC} \cdot (S - d) \right)$$

, siendo d un parámetro que toma valores en el intervalo $[0, 1/3S]$. Se trata de un **segmento** (ecuación paramétrica de una recta) de origen en el punto ($d = 0$) donde $A_1 = A_2 = A_3 = S$. Es un punto de la mediana sobre un segmento paralelo al lado AC a una distancia igual a la altura. El otro extremo se obtiene para $d=1/3$ que se corresponde con un punto sobre el lado del triángulo $A_1 = 0$ $A_2 = 1/3S$ y $A_3 = 2/3S$

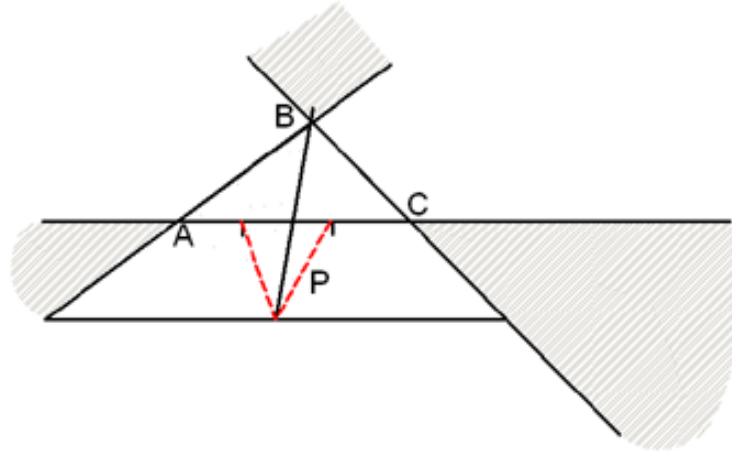
Intercambiando A_2 sobre el lado BC del triángulo, nos sale otro segmento con el mismo origen y extremo separado del anterior $1/3AC$. La ecuación del segmento en paramétricas es :

$$\left(\frac{2}{AB} \cdot (S - d), \frac{2}{BC} \cdot (S - 2d) \right)$$

El punto itersección de los dos segmentos se obtiene para $d = 0$,

$$\left(\frac{2S}{AB}, \frac{2S}{BC} \right)$$

En estas corrdenadas $A_1 = A_2 = A_3 = S$



2. $[PAC] = A_2$ Este caso resulta incluso más cómodo.

$$A_1 + A_2 + A_3 = S + 2A_2 = 3A_2 \implies S = A_2$$

No hay problema en que P ha de estar en un segmento paralelo al lado AC a una distancia igual a la altura del triángulo sobre el lado AC. (la comprobación de que es un segmento es análogo al caso anterior. En este caso $A_1 = S - d \geq 0$ implica que d varía en $[0, S]$. Varía entre puntos con $A_1 = A_2 = A_3 = S$ hasta $A_1 = 0; A_2 = S; A_3 = 2S$ valor que está sobre la prolongación de uno de los lados (medio segmento). Igual que en el caso anterior, intercambiando A_1 sobre el otro lado aparece el otro medio segmento desde el punto donde se verifica $A_1 = A_2 = A_3 = S$ hasta el punto donde se verifica $A_1 = 0; A_2 = S; A_3 = 2S$ pero sobre el otro lado.

3. $[PAC] = A_3$ La única posibilidad que nos queda en esta región.

$$A_1 + A_2 + A_3 = S + 2A_3 = 3A_2 \implies S = A_2 + 2(A_2 - A_3) = A_0$$

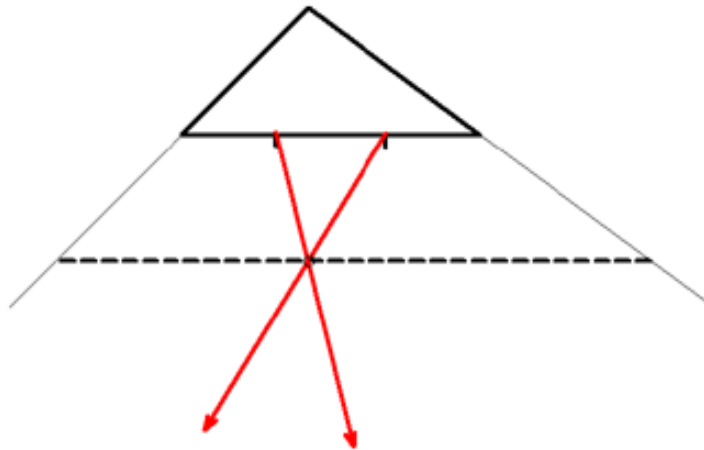
Obtenemos por tanto $A_1 = S + d; A_2 = S + 2d$ y $A_3 = S + 3d$

d ahora no aparece acotado y por tanto varía en el intervalo $[0, \infty)$

Como observación las alturas de cada triángulo son superiores a las respectivas sobre cada lado del triángulo original. Así la región válida es superior al segmento del gráfico anterior paralelo al lado AC y a distancia igual a su altura, pero también superior a rectas paralelas a los lados por los vértices opuestos. Además puesto que en la mediana los triángulos tienen igual área el punto P podrá estar a ambos lados de la mediana.

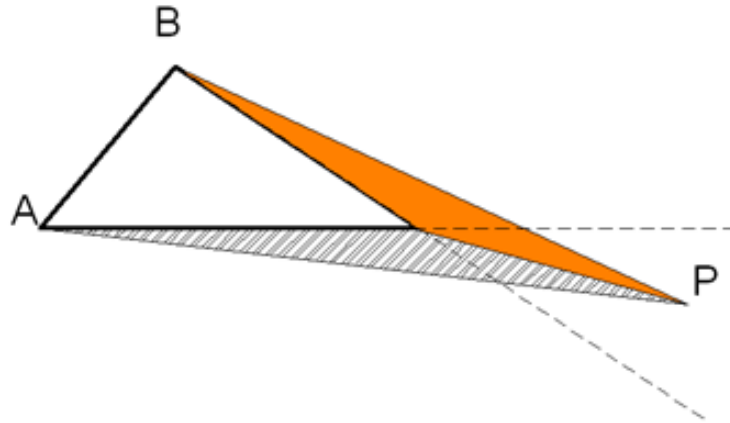
Por el procedimiento parecido al primer caso, obtenemos que efectivamente se trata de la ecuación, en este caso de una semirrecta. Cambiando el lado sobre el que ponemos A_1 nos salen dos semirrectas.

Para $d = 0$ las semirrectas parten del punto origen de todo $A_1 = A_2 = A_3 = S$. La ecuación exacta se encuentra dando un valor a d cualesquiera y para $d = -S/3$ obtenemos $A_1 = 0$; $A_2 = 1/3S$ y $A_3 = 2/3S$. La semirrecta es continuación de los segmentos obtenidos en el apartado 1).



- C) Aun nos queda las tres regiones limitadas por las prolongaciones de los lados a partir de los vértices.

En estas regiones se verifica $A_3 = S + A_1 + A_2$. Por tanto $d = A_3 - A_2 = S + A_1 \implies A_1 = d - S; A_2 = 2d - S; A_3 = 3d - S$



Obsérvese que el lado del triángulo opuesto al vértice generador de la región forma con el punto P un triángulo que contiene a los otros dos, en caso de estar en progresión aritmética este es A_3

$$d - S \geq 0 \implies d \geq S$$

El dominio para d es el intervalo $[S, \infty)$. La ecuación de P es una semirrecta:

Si A_1 está sobre el lado AC las coordenadas de P

$$\left(\frac{2}{AC} \cdot (d - S), \frac{2}{BC} \cdot (2d - S) \right)$$

Para $d = S \implies A_1 = 0; A_2 = S; A_3 = 2S$. Se trata del extremo del segmento paralelo al lado AC considerado en el apartado B) 2). Pero dando por ejemplo el valor $d = 0$ observamos que pasa por un punto donde los tres triángulos tienen igual área, pero en la región limitada por el lado opuesto al vértice considerado. La semirrecta está sobre las mismas semirrectas consideradas en

el apartado C) de la región opuesta, lo cual simplifica el problema. Si A_1 está sobre el lado BC nos sale la otra semirrecta.

Así el lugar geométrico nos queda tres segmentos interiores paralelos a los lados a $1/3$ de las alturas a los lados; otros tres segmentos exteriores paralelos a los lados a una distancia igual a la altura respectiva sobre cada lado y seis rectas donde, a cada una de ellas, se les suprime un segmento abierto de puntos.

