

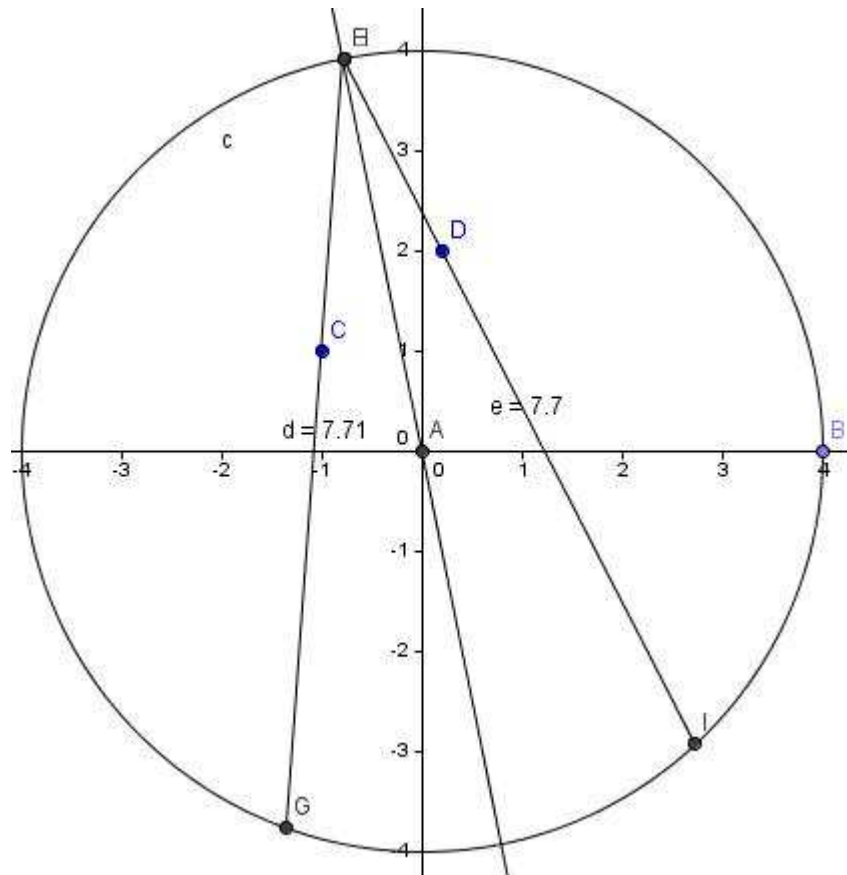
Problema 650

Problema de Alhazen (965-1040)

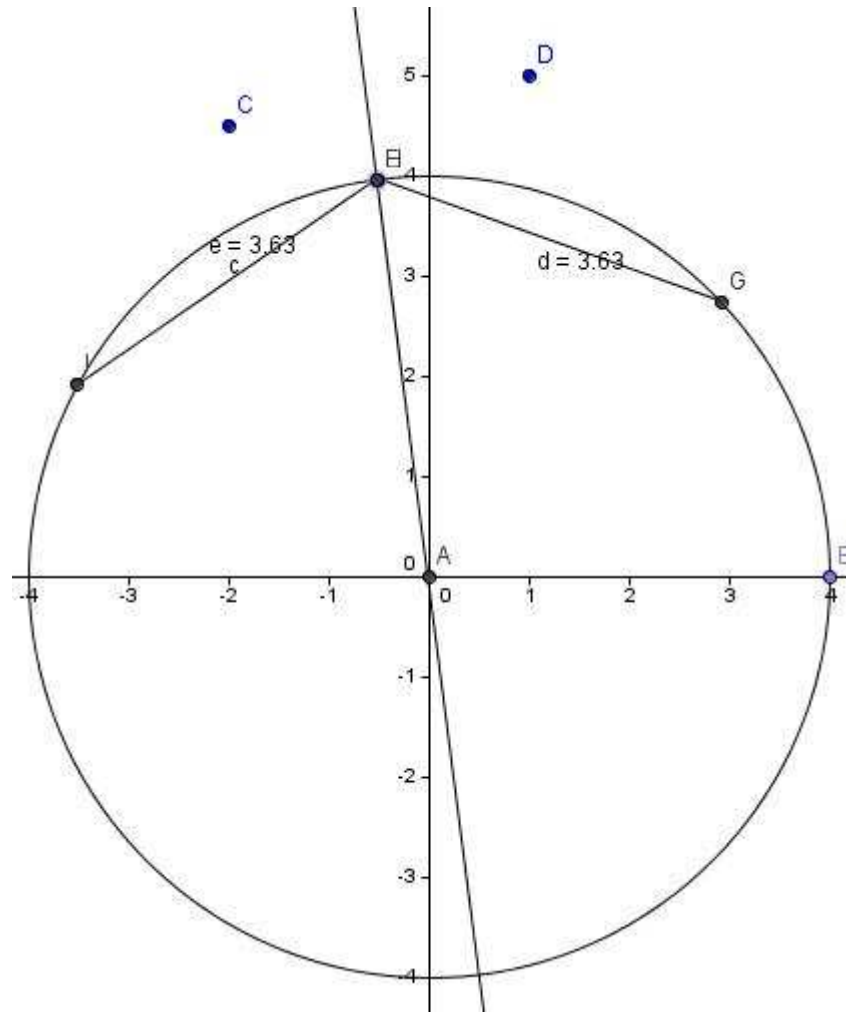
En un círculo dado, encontrar un triángulo isósceles cuyos lados iguales pasan a través de dos puntos dados en el interior del círculo.

Solución de Nicolás Rosillo

Experimentalmente parece observarse que la solución aparece cuando la bisectriz que forman los puntos dados con el vértice buscado pasa por el centro de la circunferencia.



Esto se observa también si los puntos dados son exteriores a la circunferencia



La ecuación de la bisectriz interior correspondiente al primer vértice del triángulo de vértices (a,b), (c,d) y (e,f) es

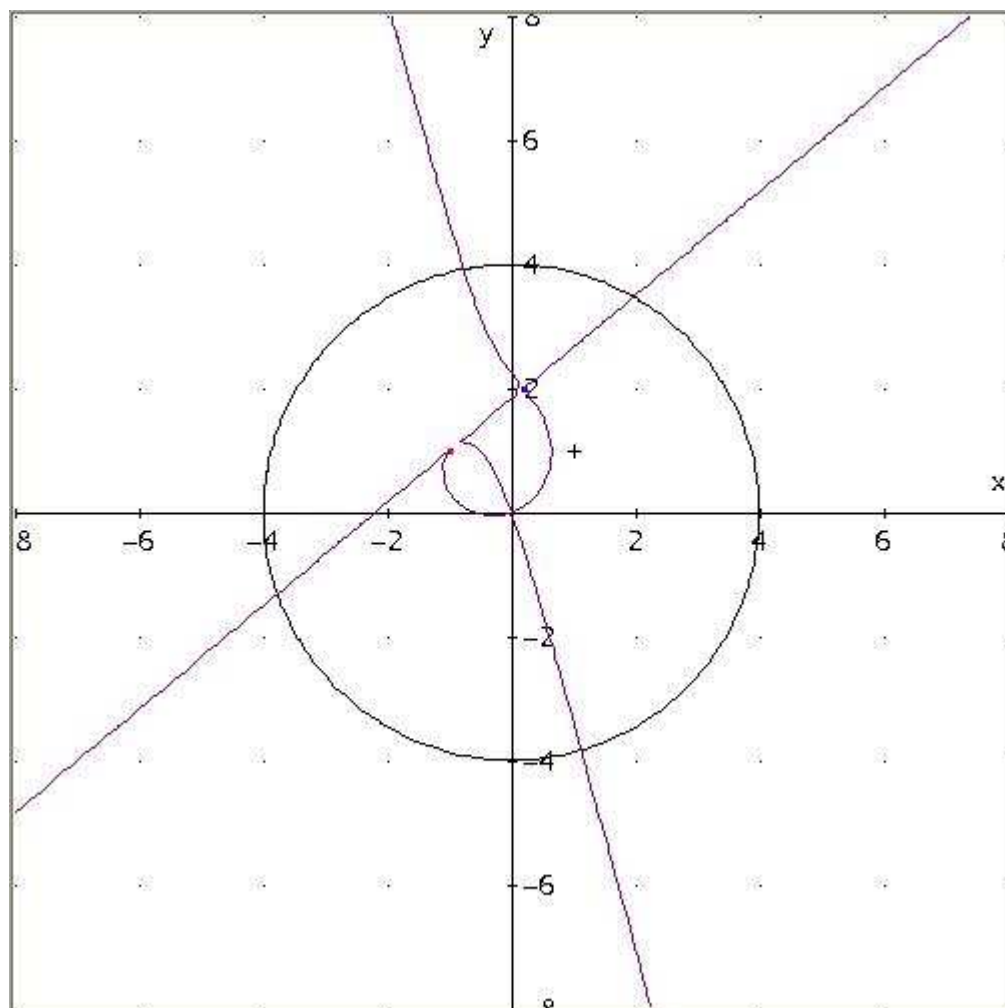
$$x \cdot (\sqrt{(a^2 - 2 \cdot a \cdot c + b^2 - 2 \cdot b \cdot d + c^2 + d^2)} \cdot (b - f) + \sqrt{(a^2 - 2 \cdot a \cdot e + b^2 - 2 \cdot b \cdot f + e^2 + f^2)} \cdot (b - d)) - y \cdot ((a - e) \cdot \sqrt{(a^2 - 2 \cdot a \cdot c + b^2 - 2 \cdot b \cdot d + c^2 + d^2)} + (a - c) \cdot \sqrt{(a^2 - 2 \cdot a \cdot e + b^2 - 2 \cdot b \cdot f + e^2 + f^2)}) + \sqrt{(a^2 - 2 \cdot a \cdot c + b^2 - 2 \cdot b \cdot d + c^2 + d^2)} \cdot (a \cdot f - b \cdot e) + \sqrt{(a^2 - 2 \cdot a \cdot e + b^2 - 2 \cdot b \cdot f + e^2 + f^2)} \cdot (a \cdot d - b \cdot c) = 0$$

Si suponemos la circunferencia centrada en el origen, el término independiente de la expresión anterior ha de anularse, lo que unido a la pertenencia del punto buscado a una circunferencia, conduce a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Así si los puntos dados son (-1, 1), (0.2, 2) y el radio de la circunferencia es 4, el sistema a resolver sería (tratado con Derive de forma aproximada)

$$\text{SOLVE}\left[\left(a^2 - 2 \cdot a \cdot c + b^2 - 2 \cdot b \cdot d + c^2 + d^2\right) \cdot (a \cdot f - b \cdot e)^2 = (a^2 - 2 \cdot a \cdot e + b^2 - 2 \cdot b \cdot f + e^2 + f^2) \cdot (a \cdot d - b \cdot c)^2, a^2 + b^2 = g\right], [a, b]$$

[a = -3.777742593 ∧ b = -1.314785494, a = -0.7670165443 ∧ b = 3.925771977, a = 1.129996516 ∧ b = -3.837070219, a = 1.974463904 ∧ b = 3.47871992, a = -3.785450382 + 7.045680408·i ∧ b = 7.91604516 + 3.369242223·i, a = -3.785450382 - 7.045680408·i ∧ b = 7.91604516 - 3.369242223·i]

y su representación con Derive

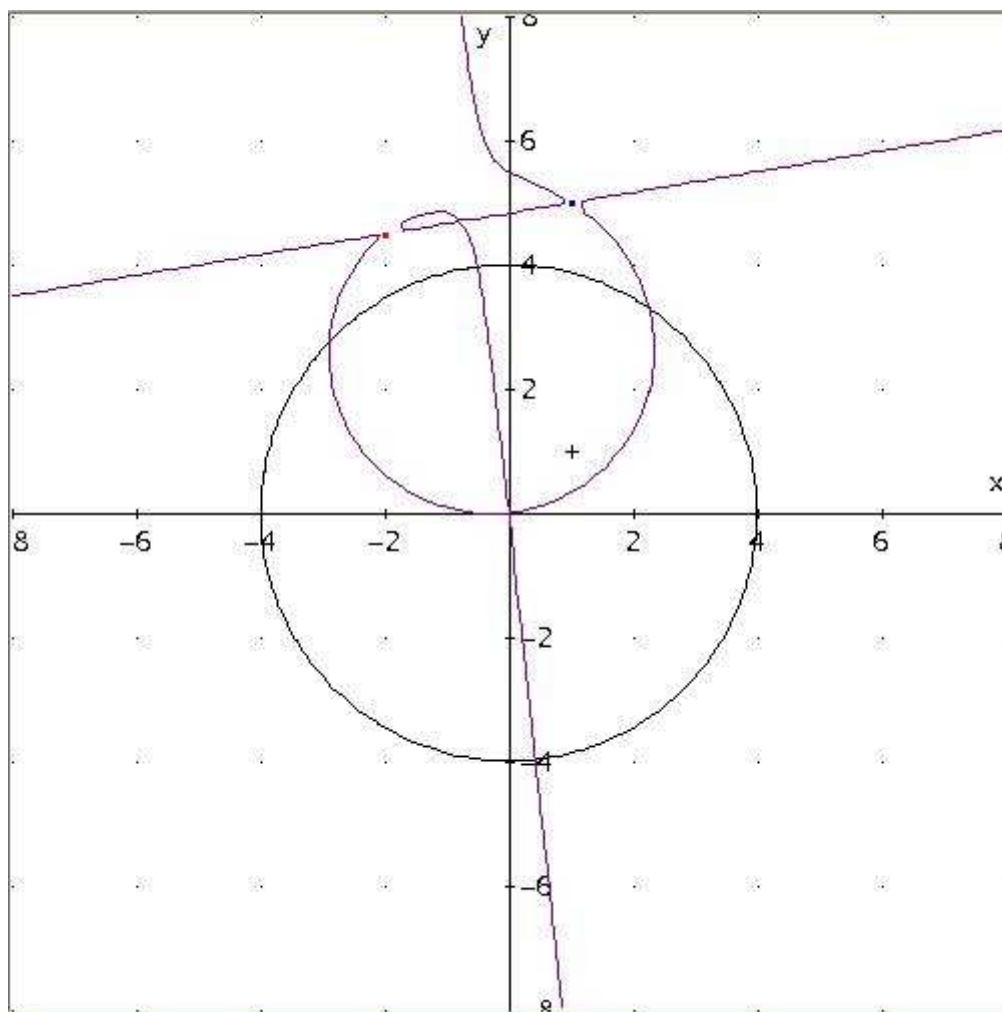


Como decíamos al inicio, con puntos exteriores también pueden realizarse los cálculos. Así para (-2, 4.5) y (1, 5) con radio 4

$$\text{SOLVE}\left[\left(a^2 - 2 \cdot a \cdot c + b^2 - 2 \cdot b \cdot d + c^2 + d^2\right) \cdot (a \cdot f - b \cdot e)^2 = (a^2 - 2 \cdot a \cdot e + b^2 - 2 \cdot b \cdot f + e^2 + f^2) \cdot (a \cdot d - b \cdot c)^2, a^2 + b^2 = g\right], [a, b]]$$

$$\begin{aligned} [a = 2.269222694 \wedge b = 3.294029197, a = 0.4312469004 \wedge b = -3.976685318, a = \\ -2.893906364 \wedge b = 2.761395654, a = -0.5107662343 \wedge b = 3.967255708, a = \\ -0.7837837837 + 2.558875758 \cdot i \wedge b = 4.702702702 + 0.4264792929 \cdot i, a = -0.7837837837 - \\ 2.558875758 \cdot i \wedge b = 4.702702702 - 0.4264792929 \cdot i] \end{aligned}$$

cuya representación gráfica es



La solución simbólica exacta del sistema de ecuaciones ha sido hallada con *Mathematica* y el desarrollo de dicha expresión en un fichero formato pdf ocupa 729 páginas (a disposición del lector interesado).

Valdepeñas, a 3 de junio de 2012