

Problema 653 de triángulos cabri. Sea ABC un triángulo. Encontrar los puntos P del plano ABC tales que las áreas PAB , PAC y PBC en valor absoluto y en cualquier orden, sea una de ellas la media armónica de las otras dos.

Propuesto Ricardo Barroso Campos.

Solución de Francisco Javier García Capitán

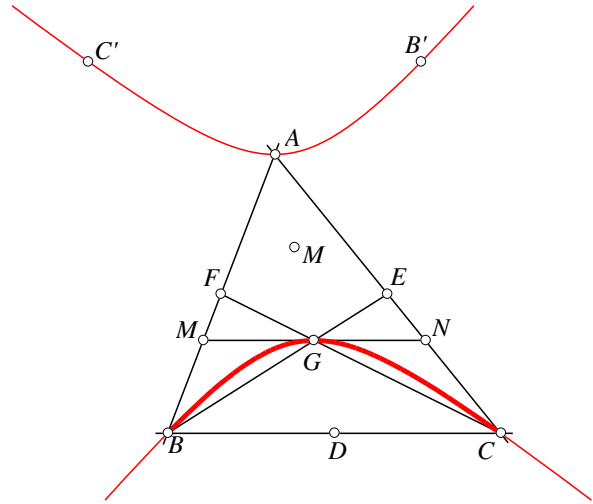
Si $(x : y : z)$ son las coordenadas baricéntricas de un punto P , sabemos que $x : y : z = (PBC) : (PCA) : (PAB)$ donde (XYZ) representa el área con signo del triángulo XYZ , es decir (XYZ) es positivo o negativo según XYZ tenga o no la misma orientación que ABC . En el enunciado las áreas PAB , PAC y PBC se consideran positivas.

Puntos interiores al triángulo

Si P es interior al triángulo ABC , los dos tipos de áreas coinciden y, refiriéndonos al vértice A , PBC será la media armónica de PAB y PAC si y solo si

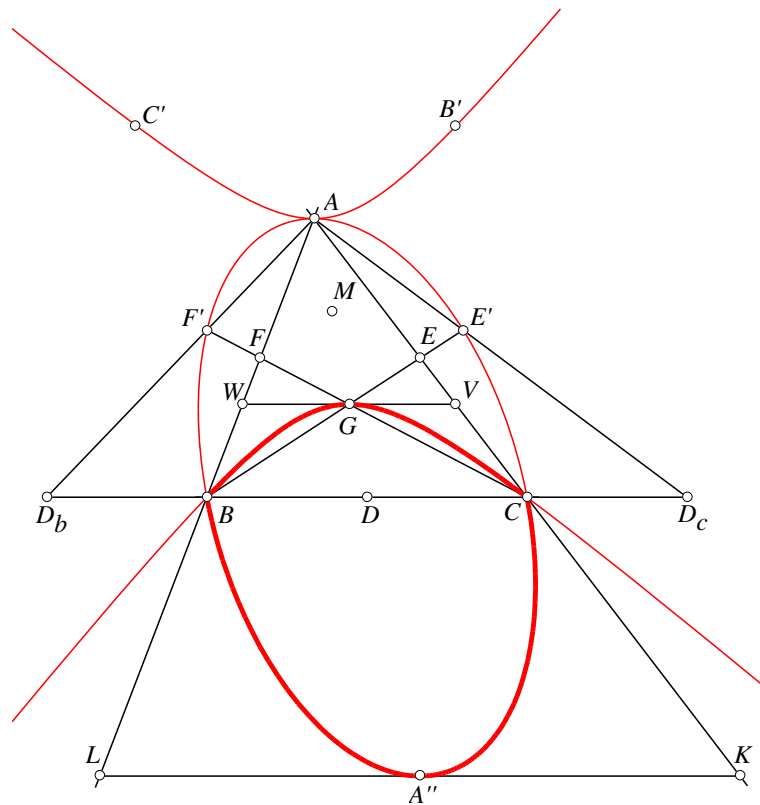
$$x = \frac{2yz}{y+z} \Leftrightarrow 2yz - x(y+z) = 0.$$

La cónica $2yz = x(y+z)$, con discriminante 3, por tanto siempre una hipérbola, es conjugada isotómica de $2x - y - z = 0$, la recta paralela a BC por el baricentro G del triángulo, que corta a los lados CA y AB en los puntos $V = (1 : 0 : 2)$ y $W = (1 : 2 : 0)$. Tiene su centro en el punto $M = (4 : 1 : 1)$, punto medio del segmento AG . Entonces la cónica pasa por los puntos A, B, C, G, B', C' , siendo B', C' los simétricos de B, C respecto de M . El trozo de la hipérbola que nos interesa, interior al triángulo, está formado por los conjugados isotómicos de los puntos del segmento VW .



Puntos interiores al ángulo A

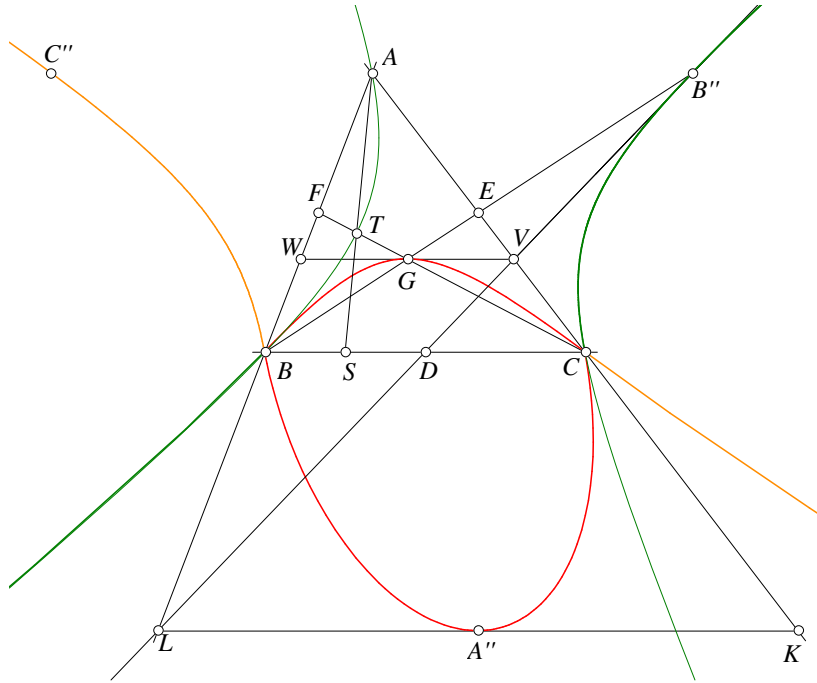
Si P es interior al ángulo formado por las semirrectas AB y AC , o bien al ángulo opuesto por el vértice, pero exterior al triángulo, tenemos que $PBC : PAC : PAB = -x : y : z$, por lo que P debe estar sobre la cónica $2yz = -x(y + z)$, isotómica de la recta $2x + y + z = 0$, paralela a BC por el punto simétrico A'' de A respecto de D . Si dicha recta corta a CA y AB en K y L , el trozo de cónica que nos interesa es el formado por los conjugados isotómicos de los puntos del segmento KL . Dicha cónica es siempre una elipse, ya que su discriminante es -1 . Aquí vemos la hipérbola y la elipse, y en trazo grueso, las partes formadas por los puntos solución encontrados hasta el momento.



La figura muestra dos puntos señalados de la cónica: Sean D_b y D_c los simétricos de D respecto de B y C , respectivamente. Entonces $E' = BE \cap AD_c$ y $F' = CF \cap DE'$ están sobre la cónica.

Puntos interiores al ángulo B (resp. C)

Si P es interior al ángulo formado por las semirrectas BA y BC , o bien al ángulo opuesto por el vértice, pero exterior al triángulo, tenemos que $PBC : PAC : PAB = x : -y : z$, por lo que P debe estar sobre la cónica $-2yz = x(-y + z) \Leftrightarrow 2yz = x(y - z)$, isotómica de la recta $2x + y - z = 0$, que es la recta que pasa por los puntos D , V y L .



En este caso, la cónica es siempre una hipérbola (tiene discriminante 2) y pasa por el punto simétrico B'' de B respecto de E . Otro punto sobre esta hipérbola: si S es el punto medio de B y D , entonces $T = AS \cap CF$ pertenece a la cónica.

De esta hipérbola (verde) hemos destacado la parte interior al ángulo B . En la figura mostramos también las soluciones pertenecientes al ángulo C , que se obtendrían de forma similar.

Finalmente, mostramos las soluciones refiriéndonos también a los otros dos vértices.

