

Problema 654.- Un triángulo ABC se divide en cuatro más pequeños por medio de los puntos X, Y, Z en los lados AB, BC, CA respectivamente. Demostrar que el triángulo del centro XYZ , no puede tener la menor circunferencia circunscrita.

(Hay una excepción: cuando X, Y, Z son los puntos medios de los lados respectivos, en cuyo caso los cuatro triángulos tienen la misma circunferencia circunscrita).

Szekeres, G. (1966): "Unsolved Problems 3":G.Szekeres en Parábola : a mathematics magazine for secondary school students. p.p 15-16

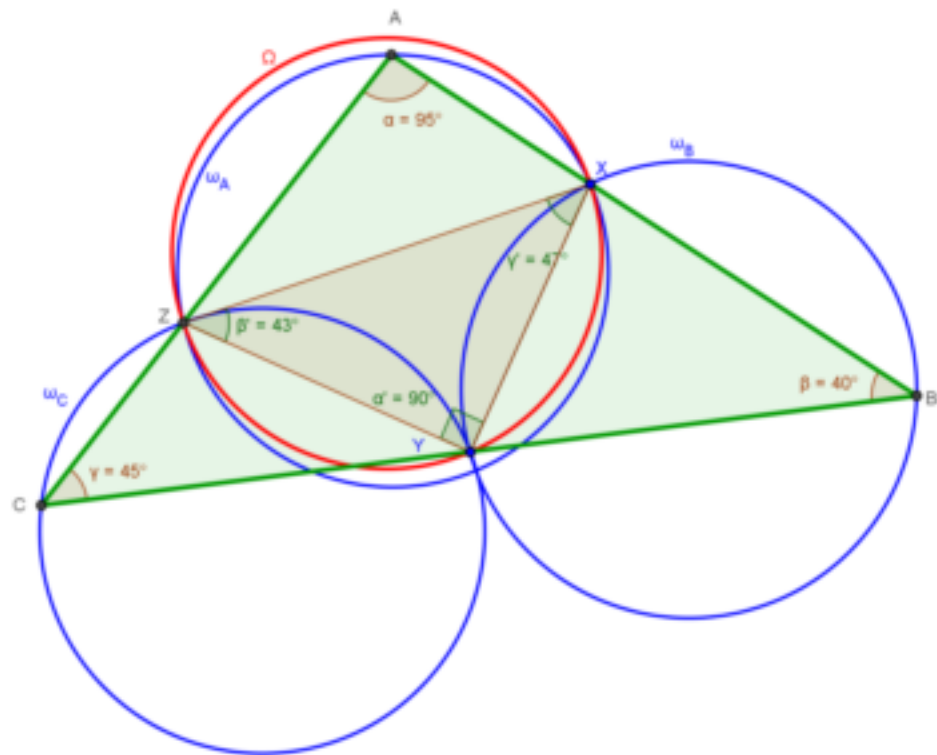
Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Supongamos que los triángulos ABC y XYZ sean acutángulos. Sean α', β', γ' los ángulos de XYZ opuestos respectivamente a los vértices A, B y C del triángulo. Sean R_A y R_Ω los radios de las circunferencias circunscritas a los triángulos AXZ y XYZ respectivamente. Según el teorema de los senos, la razón de

los radios respectivos es $\frac{R_A}{R_\Omega} = \frac{\text{sen } \alpha'}{\text{sen } \alpha}$.

Para que Ω sea la circunferencia de menor radio entre las circunscritas a los cuatro triángulos menores en que se descompone ABC por los puntos X, Y, Z , se ha de verificar que

$\alpha' > \alpha$ y también $\beta' > \beta, \gamma' > \gamma$. Por tanto $\alpha' + \beta' + \gamma' > \alpha + \beta + \gamma = 180$, lo cual es imposible.



Cuando el ángulo A es obtuso, las cosas cambian bastante: el seno empieza a ser decreciente a partir del recto, su valor es el del suplementario agudo, que es con el que hay que hacer las comparaciones. Sea pues $\alpha = 180 - (\gamma + \beta)$, entonces $\text{sen } \alpha = \text{sen } (\gamma + \beta)$, donde $(0 < \gamma + \beta < 90)$. Si $\alpha' > \gamma + \beta$ y también $\beta' > \beta, \gamma' > \gamma$, como se muestra en la figura, el radio R_Ω es necesariamente **menor** que los radios de las otras tres circunferencias.

Para las circunferencias de la figura $R_\Omega = 7.76; R_A = 7.79; R_B = 8.23, R_C = 8.03$ (redondeando a dos cifras decimales).

En conclusión: la conjetura es falsa en general. ■