

**Problema 655 de *triángulos cabri*.** Construir un triángulo  $ABC$  con inradio  $r$  y circunradio  $R$  tal que tenga una única circunferencia tangente interiormente a la circunferencia circunscrita y a la vez sea tangente exteriormente a la circunferencia inscrita, que tenga radio  $r$ .

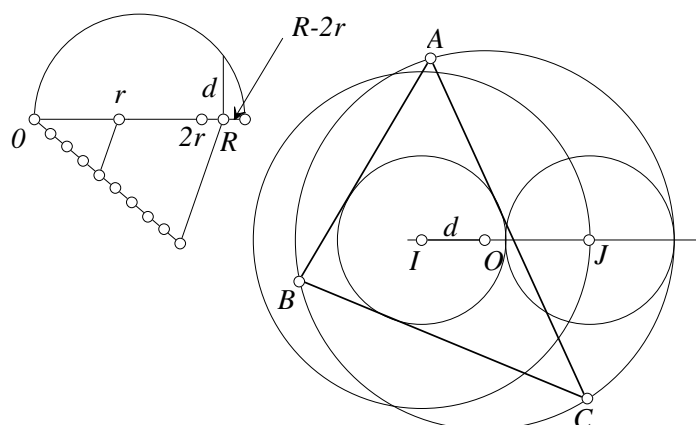
Propuesto por Ricardo Barroso Campos.

*Solución de Francisco Javier García Capitán*

Recordemos en primer lugar la fórmula de Euler que nos da la distancia  $d$  que separa el circuncentro  $O$  del incentro  $I$  de un triángulo:

$$d^2 = OI^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r), \quad (1)$$

que permite una construcción sencilla como una media geométrica.



Por otra parte, la circunferencia con centro  $I$  y radio  $2r$  debe ser tangente interior a la circunferencia con centro  $O$  y radio  $R - r$ , por lo que debe ser  $d = OI = (R - r) - 2r = R - 3r$ , y teniendo en cuenta (1), ello implica que  $r = \frac{4}{9}R$ .

Con todo esto, la construcción es como sigue: Dado un segmento de longitud  $R$ , obtenemos sobre él un segmento de longitud  $r = \frac{4}{9}R$  y construimos otro segmento de longitud  $d = \sqrt{R(2R - r)}$ . Trazamos una circunferencia con centro arbitrario  $O$  y radio  $r$ , y situamos el punto  $I$  a una distancia  $d$  de  $O$ . Para cualquier punto  $A$  sobre la circunferencia  $(O, R)$ , trazamos desde  $A$  las dos tangentes a la circunferencia  $(I, r)$ , que cortarían a la circunferencia  $(O, R)$  en los otros dos vértices del triángulo buscado. El centro  $J$  de la circunferencia tangente común es la intersección de la semirrecta  $IO$  y de la circunferencia con centro  $(I, 2r)$ .