

Problema 656.- Sea ABC un triángulo y AV la bisectriz interior del ángulo A , donde V es su pie sobre BC . Sean C' y B' los puntos medios de los lados AB y AC respectivamente.

Sean $C(C', \frac{c}{2})$ y $C(B', \frac{b}{2})$ circunferencias con centros C' y B' y radios $c/2$ y $b/2$ respectivamente. Sean los triángulos ABD , $\angle D=90^\circ$, $\angle ABD=\angle A/2$ y D en $C(C', \frac{c}{2})$; $\triangle ACE$, $\angle E=90^\circ$, $\angle EAC = \angle A/2$ y E en $C(B', \frac{b}{2})$, con D y E en el exterior de $\angle BAC$.

Definimos los puntos $F = C(C', \frac{c}{2}) \cap AE$, $G = C(B', \frac{b}{2}) \cap AD$. Construimos los triángulos ABH , con $H = BD \cap AF$, ACI con $I = CE \cap AG$.

Finalmente los siguientes puntos:

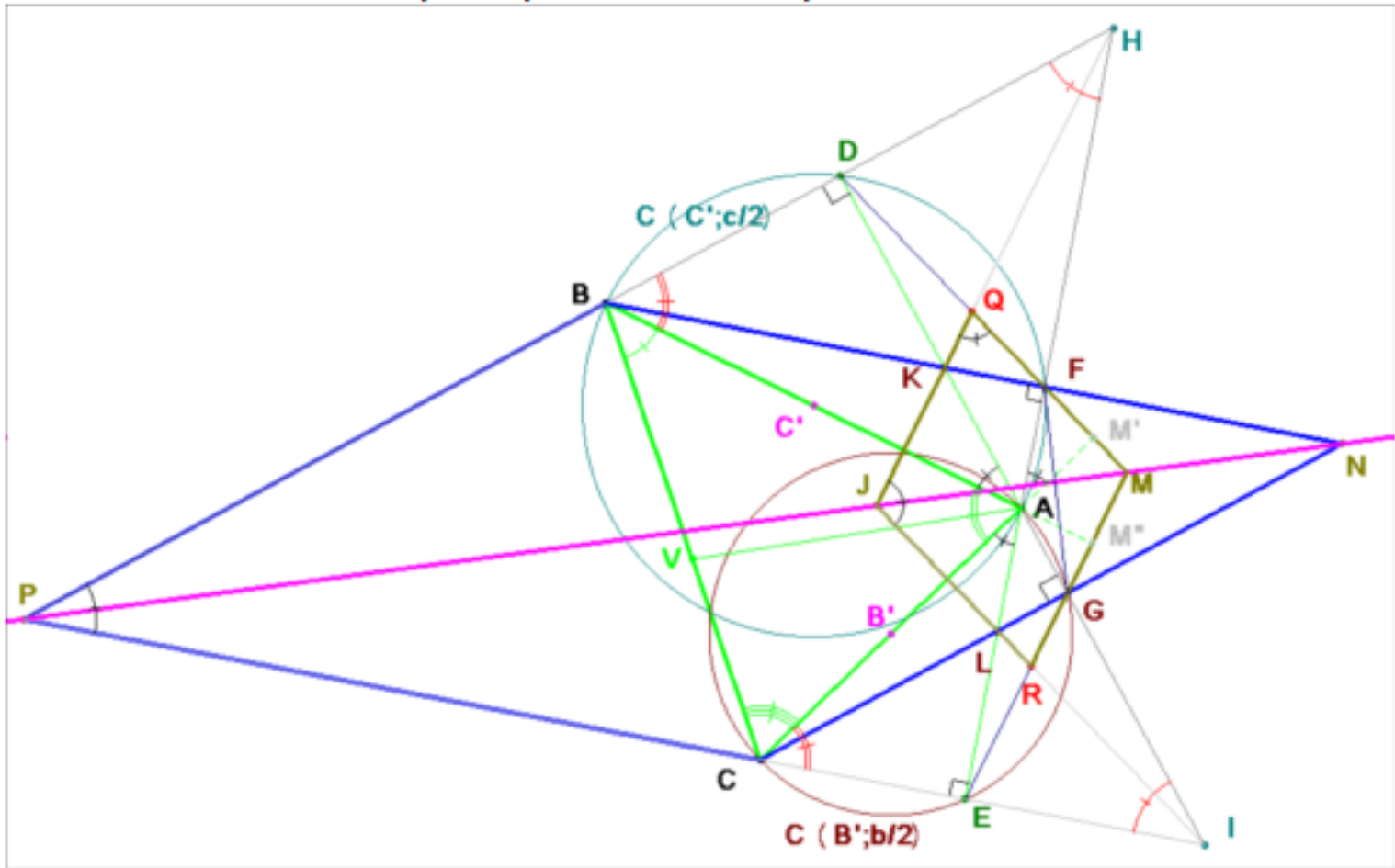
K es el ortocentro del triángulo ABH , L es el ortocentro del triángulo ACI , $Q = DF \cap HK$, $R = EG \cap IL$.

Probar si es cierto o no:

- a) Los puntos $J = IL \cap HK$, $M = DF \cap EG$, $N = BF \cap CG$ y $P = BD \cap EC$ son colineales.
- b) El cuadrilátero $JQMR$ es un paralelogramo.
- c) El cuadrilátero $BNCP$ es un paralelogramo.

Romero, J.B. (2012). Comunicación personal.

Solución de las dos últimas partes por Saturnino Campo Ruiz.



b) Los triángulos $\triangle BFA$ y $\triangle DM'A$ son semejantes: $\angle B = \angle D$ por abarcar igual arco; el ángulo en A de uno es igual al del otro pues ambos se obtienen del suplementario de $\angle CAB (= \angle BAM')$ al que se le quita $\angle A/2$ (véase la construcción de E y D), por tanto $\angle F = \angle M' = 90^\circ$. De ahí AC resulta perpendicular a DF y también a IL (es una altura), luego DF e IL son paralelos, o bien RJ y MQ .

Análoga es la semejanza entre los triángulos $\triangle CGA$ y $\triangle EM''A$. $\angle CAG = \angle DAM' = \angle BAF = \angle EAM''$; $\angle ACG = \angle M''EA$ por inscritos que abarcan igual arco. En consecuencia EM es perpendicular a AB y por tanto paralelo a HJ . Resumiendo: $JQMR$ es un paralelogramo.

Sus ángulos en Q y R son iguales a A (sus lados son perpendiculares). Los ángulos en J y M miden $180 - A$.

c) PC y BF son paralelos (ambos son perpendiculares a EF). También son paralelos PB y CN (son perpendiculares a DA). Por tanto $PBNC$ es un paralelogramo. ■