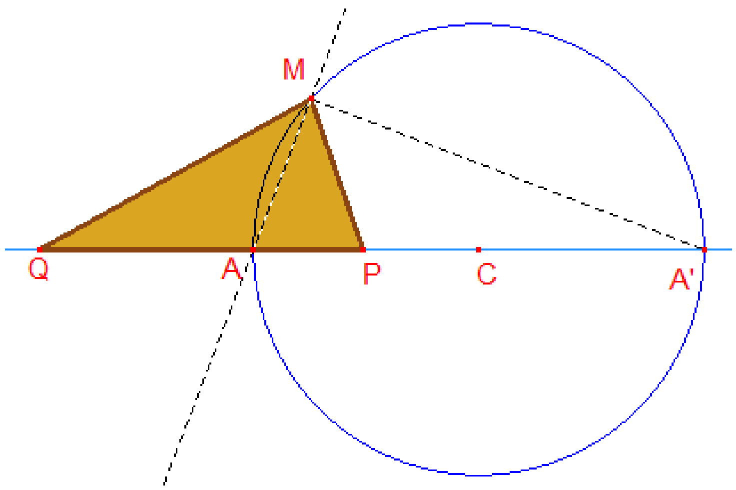
Problema 659
Proposición XXXVI. Teorema.

Sea P un punto dado dentro del círculo sobre el radio AC, y tómese afuera un punto Q sobre la prolongación del mismo radio de modo que tengamos $\mathrm{CP}:\mathrm{CA}::\mathrm{CA}:\mathrm{CQ}$, es decir: $\frac{CP}{CA}=\frac{CA}{CQ}$ (1). Si desde un punto M cualquiera de la circunferencia trazamos el triángulo MPQ, digo que los lados MP y MQ seguirán una razón constante y que $\mathrm{PM}:\mathrm{MQ}::\mathrm{AP}:\mathrm{AQ}$, es decir: $\frac{PM}{MQ}=\frac{AP}{AQ}$.

Legendre, A.M. (1807): Elementos de Geometría, con notas.

Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, Profesor del IES Blas Infante, Córdoba (España).



Dada la figura inicial, sea A’ el punto diametralmente opuesto al punto A.

Una vez construido el punto Q con la condición (1) $\frac{CP}{CA}=\frac{CA}{CQ}$, observamos que esta condición es equivalente a estas dos otras:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{CP}{CA}=\frac{CA}{CQ}=\frac{CA+CP}{CQ+CA}=\frac{A'P}{A'Q}\\[2mm] \frac{CP}{CA}=\frac{CA}{CQ}=\frac{CA-CP}{CQ-CA}=\frac{AP}{AQ}\end{array}\right. \rightarrow \frac{A'P}{A'Q}=\frac{AP}{AQ}$$

Como además se tiene que AM y MA’ son perpendiculares, resulta que estos dos segmentos AM y A’M son, respectivamente, las bisectrices interior y exterior del ángulo M en el triángulo QMP.

Por tanto, en particular se verificará el teorema de la bisectriz para la bisectriz AM, es decir: $\frac{PM}{MQ}=\frac{AP}{AQ}$ **c.q.d.**

P.D.: Dedicado al profesor y amigo D. Ricardo Barroso Campos, con motivo de su jubilación.