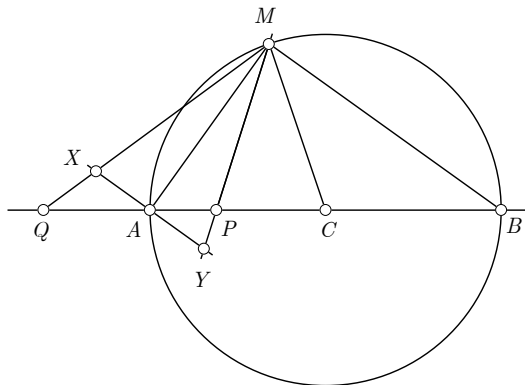


Problema 659. Sea P un punto dado dentro del círculo sobre el radio AC , y tómese afuera un punto Q sobre la prolongación del mismo radio de modo que tengamos $CP : CA = CA : CQ$. Si desde un punto M cualquiera de la circunferencia trazamos el triángulo MPQ , digo que los lados MP y MQ seguirán una razón constante y que $PM : MQ = AP : AQ$.

Legendre, A.M. (1807), Elementos de Geometría, con notas.

Soluzione di Ercole Suppa.

Per il punto A tracciamo una retta parallela ad MB ed indichiamo rispettivamente con X ed Y i punti in cui essa interseca MQ e MP .



Dai triangoli simili $\triangle APY \sim \triangle BPM$ segue che

$$\frac{MB}{AY} = \frac{PB}{PA} \quad (1)$$

mentre dai triangoli simili $\triangle QXA \sim \triangle QMB$ segue che

$$\frac{MB}{XA} = \frac{QB}{QA} \quad (2)$$

D'altra parte, essendo $CP \cdot CQ = CA^2$ abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{PB}{PA} &= \frac{CP + CB}{CA - CP} = \frac{CP \cdot CQ + CB \cdot CQ}{CA \cdot CQ - CP \cdot CQ} = \frac{CA^2 + CA \cdot CQ}{CA \cdot CQ - CA^2} = \\ &= \frac{CA + CQ}{CQ - CA} = \frac{CB + CQ}{CQ - CA} = \frac{QB}{QA} \end{aligned}$$

Da (1) e (2), essendo $PB/PA = QB/QA$, segue che

$$\frac{MB}{AY} = \frac{MB}{XA} \quad \Rightarrow \quad XA = AY \quad (3)$$

Essendo $MB \perp MA$ e $XY \parallel MB$ risulta che $MA \perp XY$. Pertanto

$$\triangle MAX \cong \triangle MAY \quad \Rightarrow \quad \angle XMA = \angle AMY$$

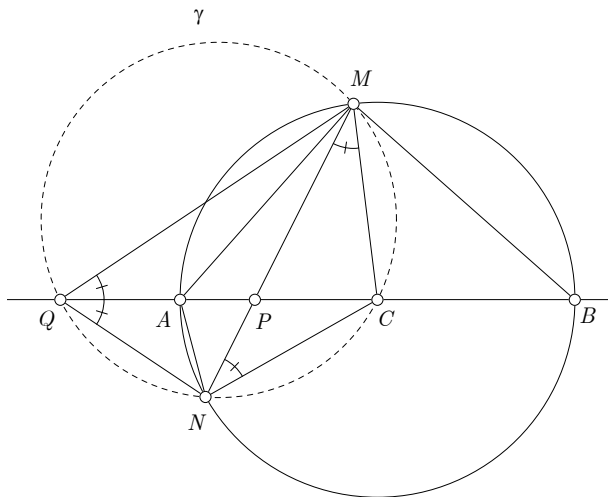
ed allora, per teorema della bisettrice applicato a $\triangle QMP$, abbiamo che

$$PM : MQ = AP : AQ$$

□

Soluzione 2.

Sia $N = MP \cap \odot(ABM)$ e sia $\gamma = \odot(QNC)$.



Essendo $CM = CN$ abbiamo che $M \in \gamma$ e quindi

$$\angle NQC = \angle NMC = \angle MNC = \angle MQC \quad (1)$$

Dal teorema dell'angolo esterno abbiamo

$$\angle AQN + \angle ANQ = \angle NAC \quad (2)$$

Dal triangolo isoscele $\triangle CAN$ abbiamo

$$\angle NAC = \angle ANC = \angle ANP + \angle PNC \quad (3)$$

Da (2) e (3), tenuto conto che $\angle AQN = \angle PNC$, abbiamo

$$\angle AQN + \angle ANQ = \angle ANP + \angle PNC \quad \Rightarrow \quad \angle ANQ = \angle ANP \quad (4)$$

Da (1) e (4) segue che A è l'incentro di $\triangle MQN$.

Pertanto MA è la bisettrice dell'angolo $\angle QMP$ e quindi

$$PM : MQ = AP : AQ$$

in virtù del teorema della bisettrice.

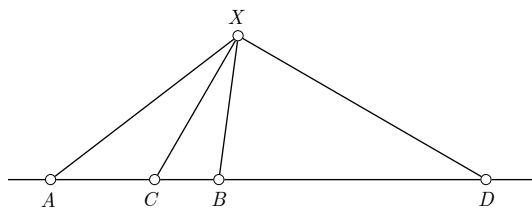
□

Soluzione 3.

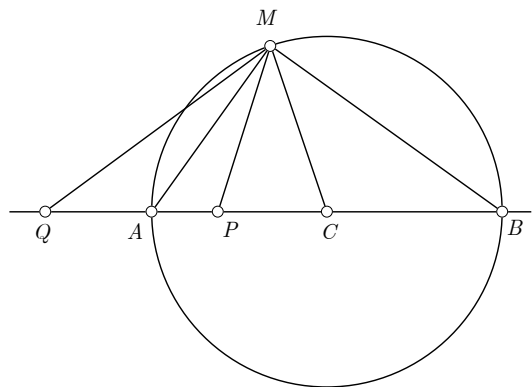
Premettiamo il seguente risultato sulla divisione armonica:

LEMMA. Sian A, B, C, D quattro punti di una retta d e sia $X \notin d$. Se due delle seguenti proposizioni sono vere, allora è vera anche la terza

- $(A, B, C, D) = -1$.
- XC è la bisettrice interna dell'angolo $\angle AXB$.
- $XC \perp XD$



Il problema proposto può essere risolto nel modo seguente:



Poichè Q è l'inverso di P rispetto a $\odot(ABM)$, risulta che $(Q, P, A, B) = -1$. Essendo $MA \perp MB$, dal LEMMA precedente discende che MA è la bisettrice di $\angle QMP$ e quindi, per il teorema della bisettrice, risulta $PM : MQ = AP : AQ$. $\square$