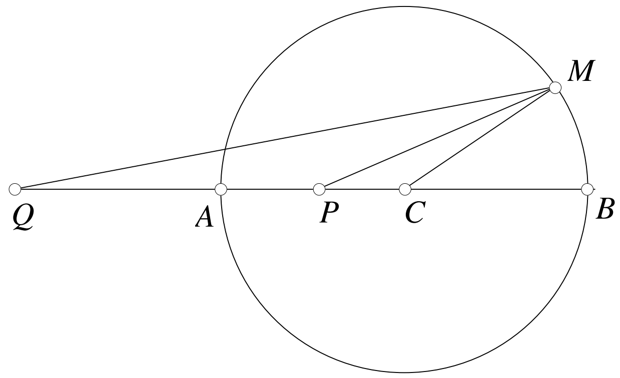
Problema 659 de *triánguloscabri*. *Sea P un punto dado dentro del círculo sobre el radio AC, y tómese afuera un punto Q sobre la prolongación del mismo radio de modo que tengamos $CP : CA :: CA : CQ$; Si desde un punto M cualquiera de la circunferencia trazamos el triángulo MPQ, digo que los lados MP y MQ seguirán una razón constante y que $PM : MQ :: AP : AQ$.*

Legendre, A.M. (1807): Elementos de Geometría, con notas. Prop. XXXVI.

Solución de *Francisco Javier García Capitán*

Para dar una solución diferente a la del libro, usaremos la inversión.



La relación $CP \cdot CQ = CA^2 = R^2$ indica que P y Q son puntos inversos respecto de la circunferencia, y M es un punto invariante por estar sobre la circunferencia. Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos inversos X', Y' de X, Y mediante una inversión de centro O y radio R,

$$X'Y' = \frac{R^2}{OX \cdot OY} \cdot XY$$

tenemos

$$MP = M'Q' = \frac{R^2}{CM \cdot CQ} \cdot MQ \Rightarrow \frac{PM}{MQ} = \frac{R}{CQ} \left(= \frac{CP}{R} \right) = \text{cte.}$$