

Problema 659.- *Proposición XXXVI. Teorema. Sea P un punto dado dentro del círculo sobre el radio AC, y tómesese afuera un punto Q sobre la prolongación del mismo radio de modo que tengamos $CP:CA::CA:CQ$ [es decir, $(\frac{CP}{CA} = \frac{CA}{CQ})$]; Si desde un punto M cualquiera de la circunferencia trazamos el triángulo MPQ, digo que los lados MP y MQ seguirán una razón constante y que $PM:MQ::AP:AQ$ [es decir, $(\frac{PM}{MQ} = \frac{AP}{AQ})$].*

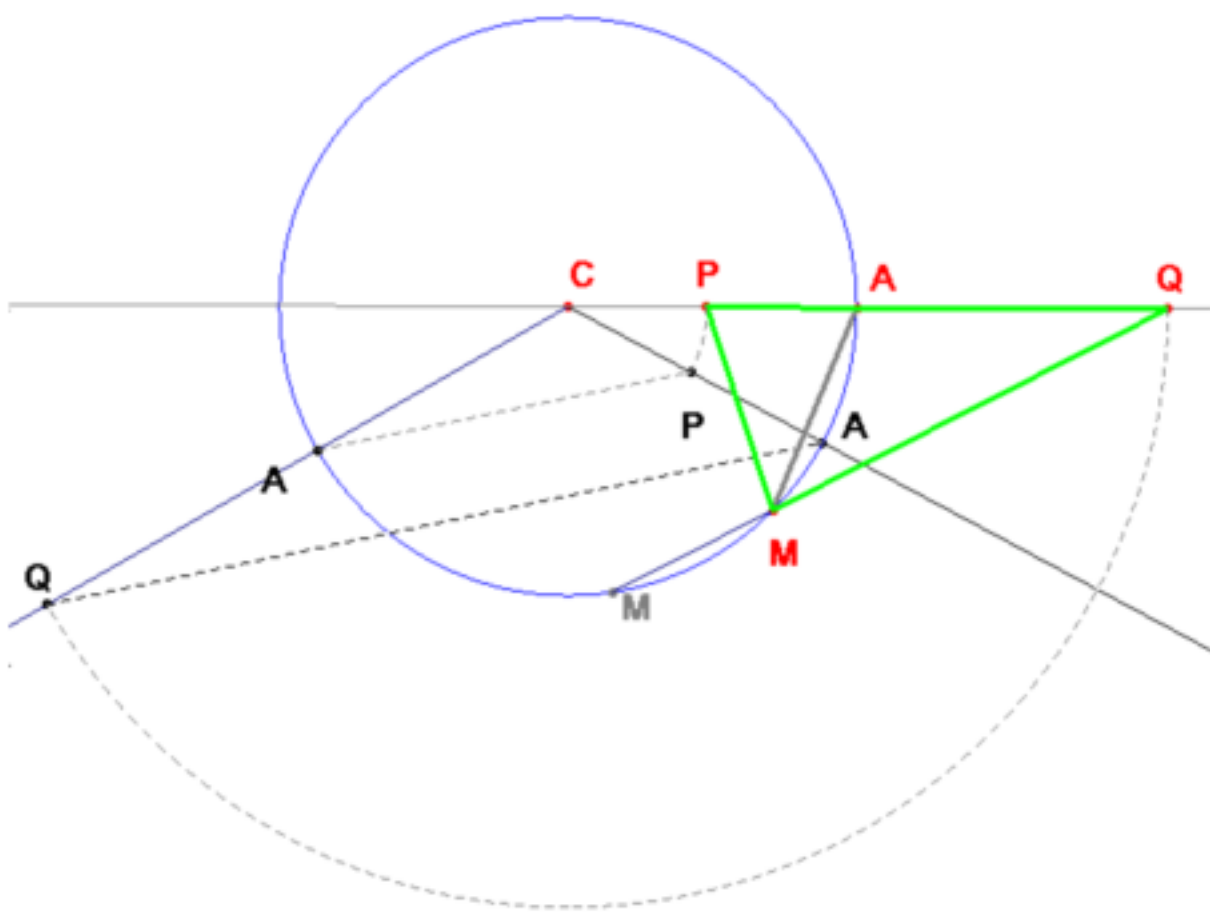
Legendre, A.M. (1807): Elementos de Geometría, con notas.

El autor fue miembro del Instituto Nacional de Francia, y de la Real Sociedad de Londres.

Traducido al castellano por D. Antonio Gilmán. Madrid. Imprenta de Repulles. (Libro III p. 91, con una leve modificación del texto).

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.

Para la construcción del punto Q utilizamos el teorema de Thales, tal como muestra la figura.



Tomando unos ejes coordenados centrados en C, con CA como eje de abscisas, podemos suponer que los puntos que intervienen tienen coordenadas $C(0,0); A(1,0); P(p, 0); Q(q, 0)$. La condición sobre el punto Q se expresa poniendo $pq = 1$.

De ahí $q = \frac{1}{p}$. Para el punto M tenemos coordenadas $M(\cos \alpha, \sin \alpha)$.

Con esto se tiene $|PM|^2 = p^2 + 1 - 2p \cdot \cos \alpha$, $|QM|^2 = \frac{1}{p^2} (p^2 + 1 - 2p \cdot \cos \alpha) = \frac{1}{p^2} |PM|^2$, $|PA|^2 = (1 - p)^2$,
 $|QA|^2 = \left(\frac{1}{p} - 1\right)^2 = \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{1}{p^2} |PA|^2$.

Con esto se comprueba que es verdadera la relación $|PM \cdot QA|^2 = |PA \cdot QM|^2$.

La conclusión del teorema es que AM es una bisectriz del triángulo MPQ. ■