Problema 660.
Propuesta de Ricard Peiró i Estruch, profesor de Matemáticas del IES "Abastos" (Valencia)

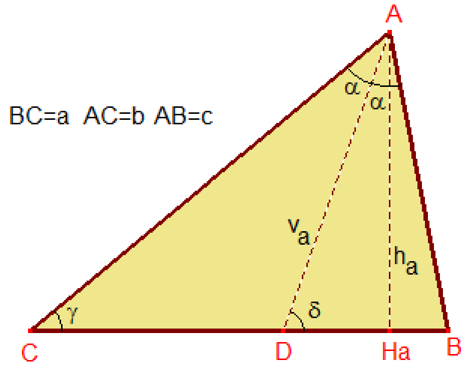
Un lado de un triángulo, la bisectriz y la altura que parten de un vértice, miden 17, 10 y 8cm. Calcular el área del triángulo.

(Problemas de examen de estado. (1950) Edelvives. Zaragoza. Problema 422. Página 78)

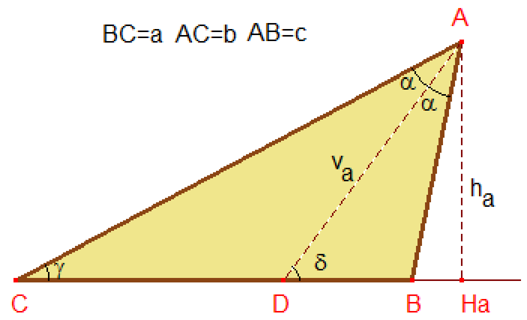
Solución de F. Damián Aranda Ballesteros, Profesor del IES Blas Infante, Córdoba (España).

A la vista de los datos dados, observamos dos posibilidades de configuración.

CONFIGURACIÓN I



CONFIGURACIÓN II



Según los datos del ejercicio dado, tenemos que: $h_a = 8\,cm;\ b = 17\,cm;\ v_a = 10\,cm$

Obtenemos trivialmente la longitud de los siguientes segmentos: $CH_a = 15\,cm;\ DH_a = 6\,cm;\ CD = 9\,cm$

Por el teorema de la bisectriz:

$$\begin{cases} \dfrac{17}{9} = \dfrac{c}{DB} \\ (6-DB)^2 + 8^2 = c^2 \end{cases} \rightarrow \left\{ c = \frac{425}{52}, DB = \frac{225}{52} \right\}$$

Obsérvese que $DB = \dfrac{225}{52}\,cm < 6\,cm$. Por tanto, la configuración del triángulo será la segunda.

El triángulo es obtusángulo. Por tanto, los lados del triángulo solicitado miden

$$a = 9 + DB = 9 + \frac{225}{52} = \frac{693}{52}\,cm; \quad b = 17\,cm; \quad c = \frac{425}{52}\,cm$$

El valor S del área del triángulo ABC será $S = \dfrac{1}{2}.a.h_a = \dfrac{1}{2}.\dfrac{693}{52}.8 = \dfrac{693}{13}\,cm^2$