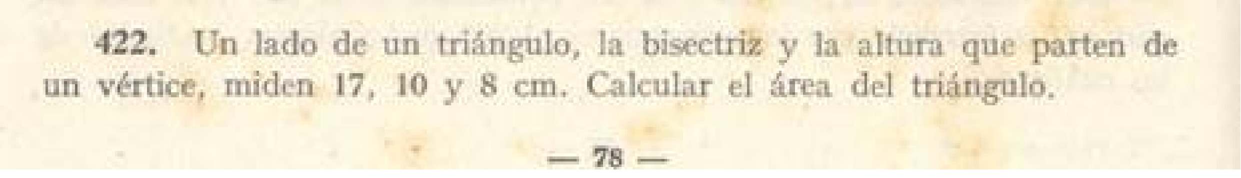
Propuesta de Ricard Peiró i Estruch, profesor de Matemáticas del IES "Abastos" (Valencia).

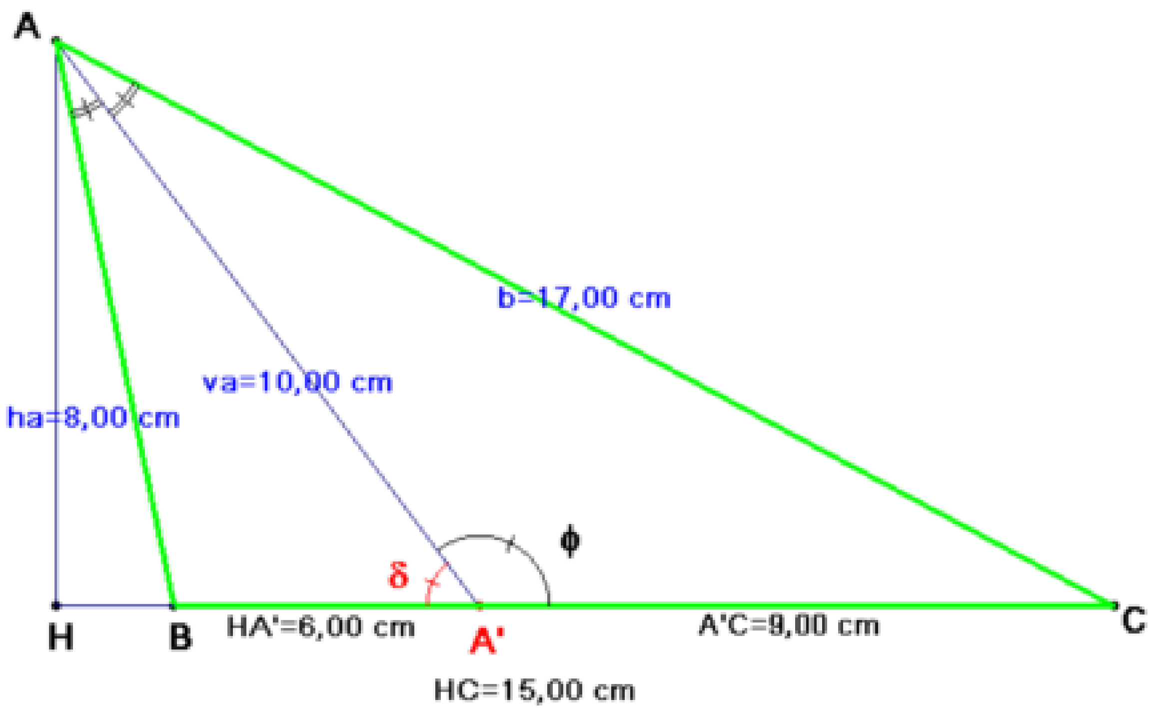

422. Un lado de un triángulo, la bisectriz y la altura que parten de un vértice, miden 17, 10 y 8 cm. Calcular el área del triángulo.

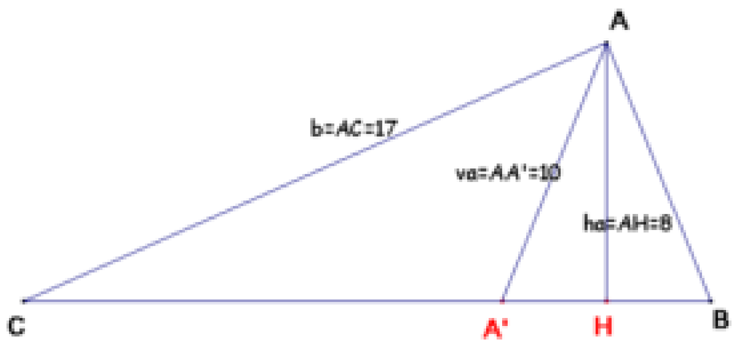
— 78 —

Problema 660.- Un lado de un triángulo, la bisectriz y la altura que parten de un vértice, miden 17, 10 y 8 cm. Calcular el área del triángulo.

Problemas de examen de estado. (1950) Edelvives. Zaragoza. Problema 422. Página 78.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.





Se puede construir fácilmente el triángulo. A partir de la altura AH se traza una perpendicular por H, soporte del lado opuesto. Se llevan desde A, con el compás, los segmentos $b = 17$ y $va = 10$. Quedan definidos los puntos C y A'. Como AA' es la bisectriz, el lado restante ha de ser el simétrico respecto de ella del lado AC. De este modo se construye el vértice B y con él queda concluida la figura. Ha resultado ser un triángulo obtusángulo en B. Gracias al teorema de Pitágoras se tiene los valores de $HC = 15$ y $A'H = 6$, de donde deducimos que $A'C$ mide 9 cm.

En el triángulo $AA'C$, gracias al teorema de los senos, obtenemos $\frac{9}{sen\frac{A}{2}} = \frac{17}{sen\,\phi} = \frac{17}{8/10}$ y despejando $sen\,\frac{A}{2} = \frac{9}{17}\cdot\frac{8}{10} = \frac{36}{85}$. También es fácil obtener $sen\,C = \frac{8}{17}$ y C agudo. Ambos valores son menores que ½ de donde deducimos que los ángulos respectivos no llegan a medir 30º cada uno. Por tanto la suma de A y C no alcanza un recto y en consecuencia, el ángulo B es obtuso. Por eso, aunque sea pensable la situación de la segunda figura, con el pie de la altura dentro del segmento CB, ya vemos que no es posible tal situación.

Para hallar el área del triángulo sólo nos falta conocer la longitud de BA'.

Para ello calculamos previamente el valor del seno de B. El ángulo B es el suplementario de la suma $\frac{A}{2} + \delta$. Calcularemos previamente el seno y el coseno de estos ángulos.

A partir de $sen\,\frac{A}{2} = \frac{36}{85}$ se obtiene $cos\,\frac{A}{2} = \frac{77}{85}$; $sen\delta = \frac{4}{5}$ y $cos\delta = \frac{3}{5}$.

Se tiene por tanto

$$sen\,B = sen\left(\frac{A}{2} + \delta\right) = \frac{36}{85}\cdot\frac{3}{5} + \frac{77}{85}\cdot\frac{4}{5} = \frac{416}{425}$$

Ya podemos calcular BA' y el área del triángulo:

$$\frac{sen\frac{A}{2}}{BA'} = \frac{sen\,B}{10}. \qquad BA' = 10\cdot\frac{sen\frac{A}{2}}{sen\,B} = 10\cdot\frac{425}{416}\cdot\frac{36}{85} = \frac{225}{52}.$$

$$Área(ABC) = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot(9 + BA') = 4\cdot\left(9 + \frac{225}{52}\right) = 36 + \frac{225}{13} = 53 + \frac{4}{13} = \frac{693}{13} \approx 53{,}307692.$$

P.D. Aunque no se necesitan más datos del triángulo es curioso observar cómo las medidas de sus lados, sus razones trigonométricas y su área son números racionales.

$sen\,A = 2\cdot\frac{36}{85}\cdot\frac{77}{85} = \frac{72\cdot 77}{85^2}$, $\cos A = \sqrt{1 - \left(\frac{72\cdot 77}{85^2}\right)^2} = \frac{113\cdot 41}{85^2}$, $\cos B = -\frac{87}{425}$, $sen\,C = \frac{8}{17}$, $\cos C = \frac{15}{17}$, $a = 9 + BA = 9 + \frac{225}{52} = \frac{693}{52}$, $b = 17 = \frac{884}{52}$, $c = AB = \frac{8}{sen\,B} = 8\cdot\frac{425}{416} = \frac{425}{52}$. ■