

Problema 661

Siga el triangle $\triangle ABC$ tal que

- 1) D està sobre el costat $\overline{AC}$ tal que $\angle DBA = 60^\circ$, $\angle CBD = 20^\circ$.
 - 2) E està sobre el costat $\overline{BC}$ tal que $\angle EAB = 70^\circ$, $\angle CAE = 10^\circ$.
- Determineu la mesura de l'angle $\angle DEA$

Solució:

El triangle $\triangle ABC$ és isòsceles $B = C = 80^\circ$, $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Sobre el costat $\overline{AB}$ i cap a l'interior del triangle dibuixem el triangle equilàter $\triangle ABM$.

M pertany a la mediatriu del costat $\overline{AB}$.

Els triangles $\triangle CAE$, $\triangle BCM$ són iguals ja que $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\angle CAE = \angle BCM = 10^\circ$, $\angle ACE = \angle CBM = 20^\circ$.

Aleshores, $\overline{CE} = \overline{BM} = \overline{AB} = c$.

$\angle DCB = \angle DBC = 20^\circ$, aleshores, $\overline{CD} = \overline{BD}$.

Siga $\alpha = \angle CDE$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle CDE$:

$$\frac{c}{\sin \alpha} = \frac{\overline{CD}}{\sin(20^\circ + \alpha)} \quad (1)$$

$\angle ADB = 40^\circ$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\triangle ABD$:

$$\frac{c}{\sin 40^\circ} = \frac{\overline{CD}}{\sin 80^\circ} \quad (2)$$

Dividint les expressions (1) (2):

$$\frac{\sin 40^\circ}{\sin \alpha} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin(20^\circ + \alpha)} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos 40^\circ}{\sin(20^\circ + \alpha)} \quad (4)$$

$$\sin(20^\circ + \alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos 40^\circ \quad (5)$$

$$\sin(20^\circ + \alpha) = \sin(40^\circ + \alpha) + \sin(\alpha - 40^\circ) \quad (6)$$

$$\sin(20^\circ + \alpha) - \sin(\alpha - 40^\circ) = \sin(40^\circ + \alpha) \quad (7)$$

$$2 \cdot \cos(\alpha - 10^\circ) \cdot \sin 30^\circ = \sin(40^\circ + \alpha) \quad (8)$$

$$\cos(\alpha - 10^\circ) = \sin(40^\circ + \alpha) \quad (9)$$

$$\alpha - 10^\circ = 90^\circ - (40^\circ + \alpha) \quad (10)$$

$$\alpha = 30^\circ.$$

$$\angle DEC = 180^\circ - (\alpha + 20^\circ) = 130^\circ.$$

$$\angle AEB = 180^\circ - (70^\circ + 80^\circ) = 30^\circ.$$

$$x = \angle DEA = 180^\circ - (\angle DEC + \angle AEB) = 180^\circ - (130^\circ + 30^\circ) = 20^\circ.$$

