

Problema 661

Sea $\triangle ABC$ un triángulo tal que

1) D esté sobre el lado AC tal que $\angle DBA = 60^\circ$, $\angle CBD = 20^\circ$.

2) E esté sobre el lado BC tal que $\angle EAB = 70^\circ$, $\angle CAE = 10^\circ$.

Hallar la medida del ángulo $\angle DEA$.

Solución Ricard Peiró i Estruch:

El triángulo $\triangle ABC$ es isósceles $B = C = 80^\circ$, $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Sobre el lado $\overline{AB}$ y hacia el interior del triángulo dibujemos el triángulo equilátero $\triangle ABM$.

M pertenece a la mediatriz del lado $\overline{AB}$.

Los triángulos $\triangle CAE$, $\triangle BCM$ son iguales ya que $\overline{AC} = \overline{BC}$, $\angle CAE = \angle BCM = 10^\circ$, $\angle ACE = \angle CBM = 20^\circ$.

Entonces $\overline{CE} = \overline{BM} = \overline{AB} = c$.

$\angle DCB = \angle DBC = 20^\circ$, entonces, $\overline{CD} = \overline{BD}$.

Sea $\alpha = \angle CDE$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\triangle CDE$:

$$\frac{c}{\sin \alpha} = \frac{\overline{CD}}{\sin(20^\circ + \alpha)} \quad (1)$$

$\angle ADB = 40^\circ$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\triangle ABD$:

$$\frac{c}{\sin 40^\circ} = \frac{\overline{CD}}{\sin 80^\circ} \quad (2)$$

Dividiendo las expresiones (1) (2):

$$\frac{\sin 40^\circ}{\sin \alpha} = \frac{\sin 80^\circ}{\sin(20^\circ + \alpha)} \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{2 \cos 40^\circ}{\sin(20^\circ + \alpha)} \quad (4)$$

$$\sin(20^\circ + \alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos 40^\circ \quad (5)$$

$$\sin(20^\circ + \alpha) = \sin(40^\circ + \alpha) + \sin(\alpha - 40^\circ) \quad (6)$$

$$\sin(20^\circ + \alpha) - \sin(\alpha - 40^\circ) = \sin(40^\circ + \alpha) \quad (7)$$

$$2 \cdot \cos(\alpha - 10^\circ) \cdot \sin 30^\circ = \sin(40^\circ + \alpha) \quad (8)$$

$$\cos(\alpha - 10^\circ) = \sin(40^\circ + \alpha) \quad (9)$$

$$\alpha - 10^\circ = 90^\circ - (40^\circ + \alpha) \quad (10)$$

$$\alpha = 30^\circ.$$

$$\angle DEC = 180^\circ - (\alpha + 20^\circ) = 130^\circ.$$

$$\angle AEB = 180^\circ - (70^\circ + 80^\circ) = 30^\circ.$$

$$x = \angle DEA = 180^\circ - (\angle DEC + \angle AEB) = 180^\circ - (130^\circ + 30^\circ) = 20^\circ.$$

