Problema 662 de *triánguloscabri*. *Dado el triángulo ABC y siendo p, r, R el semiperímetro, radio del círculo inscrito y radio del círculo circunscrito, demostrar que se verifica:*

$$\sum_{\text{cíclica}} \sqrt{a} \leqslant \frac{p^2 - 9r^2}{\sqrt{prR}}.$$

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.

Solución de *Francisco Javier García Capitán*

Esta solución usa dos desigualdades geométricas elementales tomadas del libro *Geometric Inequalities* de O. Bottema y otros. Mostramos estas desigualdades y su demostración, y a continuación la solución del problema.

Desigualdad 1. $2p^2 \geqslant 27Rr$.

Demostración. Usando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica, $8p^3 = (a+b+c)^3 \geqslant 27abc = 27(4RS) = 27(4Rrp) \Rightarrow 2p^2 \geqslant 27Rr$.

Desigualdad 2. $p^2 \geqslant 27r^2$.

Demostración. Usando la desigualdad de las medias aritmética y geométrica,

$$\frac{p}{3} = \frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3} \geqslant \sqrt[3]{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Como $(p-a)(p-b)(p-c) = S^2/p = r^2 p$, tenemos

$$\frac{p}{3} \geqslant \sqrt[3]{r^2 p} \Rightarrow p^2 \geqslant 27r^2.$$

Solución del problema 662. Usando la desigualdad de Cauchy Schwarz,

$$\sum_{\text{cíclica}} \sqrt{aprR} = \sum_{\text{cíclica}} 1 \cdot \sqrt{aprR} \leqslant \sqrt{3} \cdot \sqrt{(a+b+c)prR} = \sqrt{6p^2 rR}.$$

Por otro, usando la **Desigualdad 1** tenemos

$$\sqrt{6p^2 rR} \leqslant \sqrt{6p^2 \frac{2p^2}{27}} = \frac{2p^2}{3} \leqslant p^2 - 9r^2 \Leftrightarrow 9r^2 \leqslant \frac{p^2}{3} \Leftrightarrow p^2 \geqslant 27r^2,$$

que es la **Desigualdad 2**.

Teniendo en cuenta todas las desigualdades usadas, la desigualdad se convierte en igualdad si y solo si el triángulo es equilátero.