Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

Problema 662.

Dado el triángulo ABC, en el que a, b, c son los lados y p, r, R son el semiperímetro, el radio del círculo inscrito, y el radio del círculo circunscrito al triángulo, entonces se verifica:

$$\sum_{ciclica}\sqrt{a} \le \frac{p^2 - 9r^2}{\sqrt{prR}},$$

$$¿Cuándo\ se\ alcanza\ la\ igualdad?$$

Romero, J.B. (2012): Comunicación personal

Solución de Juan Bosco Romero Márquez

$$Partimos\ de\ los\ siguientes\ relaciones,\ 2p = a+b+c(perímtero), S(área) = \frac{abc}{4R},$$

$$abc = 4prR,\ \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \Leftrightarrow (\frac{a+b}{2})^2 \ge ab.$$

$$Y\ de\ acuerdo\ con\ 5.16\ de\ [1]:$$

$$36r^2 \le bc + ca + ab \le 9R^2.$$

$$Tenemos\ que:$$

$$4p^2 = (a+b+c)^2 = (\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{c+a}{2}) = \sum_{ciclica}(\frac{a+b}{2})^2 + 2\sum_{ciclica}(\frac{a+b}{2})(\frac{b+c}{2}) \ge$$

$$\ge \sum_{cilcica} ab + 2\sum_{ciclica}\sqrt{ab}\sqrt{bc} = \sum_{ciclica} ab + 2\sqrt{abc}\sum_{ciclica}\sqrt{a} \ge 36r^2 + 4\sqrt{prR}\sum_{ciclica}\sqrt{a} \Leftrightarrow$$

$$\sum_{ciclica}\sqrt{a} \le \frac{p^2 - 9r^2}{\sqrt{prR}},$$

$$veamos,\ que\ la\ igualdad\ se\ tiene,\ si\ a=b=c,\ p = \frac{3a}{2},\ R = 2r, a = R\sqrt{3} =$$

$$= 2r\sqrt{3},\ a^2 = 12r^2, tenemos\ que:$$

$$\sqrt{prR}\sum_{cilica}\sqrt{a} = 3\sqrt{praR} = 3\sqrt{\frac{3a^2rR}{2}} = 3\sqrt{\frac{72r^4}{2}} = 18r^2;$$

$$p^2 - 9r^2 = \frac{9a^2}{4} - 9r^2 = 27r^2 - 9r^2 = 18r^2,\ y, tenemos\ el\ problema\ resuelto.$$

Bibliografía.

[1] *O.Bottema, y otros.: Geometric Inequalities, Groningen*, 1969

Juan-Bosco Romero Márquez