

Problema 662

Dado el triángulo ABC, en el que a, b, c son los lados y p, r, R son el semiperímetro, el radio del círculo inscrito, y el radio del círculo circunscrito al triángulo, entonces se verifica:

$$\sum \sqrt{a} \leq \frac{p^2 - 9r^2}{\sqrt{prR}},$$

¿Cuándo se alcanza la igualdad?

Solución de Ricard Peiró:

En la demostración utilizaremos los siguientes resultados:

(a) Desigualdad de Euler, $R \geq 2r$ la igualdad se alcanza cuando el triángulo es equilátero.

(b) Área d'un triángulo, $S = pr = \frac{abc}{4R}$

(c) $a^2 + b^2 + c^2 = 2(p^2 - r^2 - 4Rr)$

(d) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$, La igualdad se alcanza cuando $a = b = c$.

$$prR = \frac{abc}{4R} R = \frac{abc}{4}.$$

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \frac{p^2 - 9r^2}{\sqrt{prR}} \quad \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})\sqrt{prR} \leq p^2 - 9r^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})\sqrt{\frac{abc}{4}} \leq p^2 - 9r^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{\sqrt{a^2bc} + \sqrt{ab^2c} + \sqrt{abc^2}}{2} \right) \leq p^2 - 9r^2.$$

$ab, ac > 0$. Aplicando la desigualdad entre la mediana aritmética i geométrica:

$$\frac{ab + ac}{2} \geq \sqrt{a^2bc} \quad (1)$$

La igualdad se alcanza cuando $ab = ac$, es decir, cuando $b = c$.

Análogamente:

$$\frac{ba + bc}{2} \geq \sqrt{ab^2c} \quad (2)$$

$$\frac{ca + cb}{2} \geq \sqrt{abc^2} \quad (3)$$

Sumando las expresiones (1) (2) (3):

$$ab + ac + bc \geq \sqrt{a^2bc} + \sqrt{ab^2c} + \sqrt{abc^2} \quad (*)$$

$$p^2 - 9r^2 = p^2 - r^2 - 8r^2 \geq p^2 - r^2 - 4Rr. \text{ Aplicando (c)}$$

$$p^2 - 9r^2 \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}.$$

$$p^2 - 9r^2 \geq \frac{ab + ac + bc}{2} . \text{ Aplicando (d)}$$

Substituyendo la expresión (*)

$$p^2 - 9r^2 \geq \frac{ab + ac + bc}{2} \geq \frac{\sqrt{a^2bc} + \sqrt{ab^2c} + \sqrt{abc^2}}{2} .$$

La igualdad se alcanza cuando $a = b = c$.