

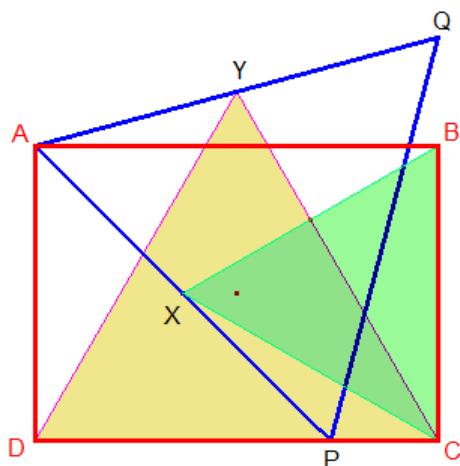
Problema 663.-

Sea $ABCD$ un rectángulo. Se construyen triángulos equiláteros BCX y DCY de modo que estos triángulos comparten algunos de sus puntos interiores con los puntos interiores del rectángulo. Las rectas AX y CD se cortan en P , y las rectas AY y BC se cortan en Q . Probar que el triángulo APQ es equilátero.

XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas Cochabamba (BOLIVIA, 2012)

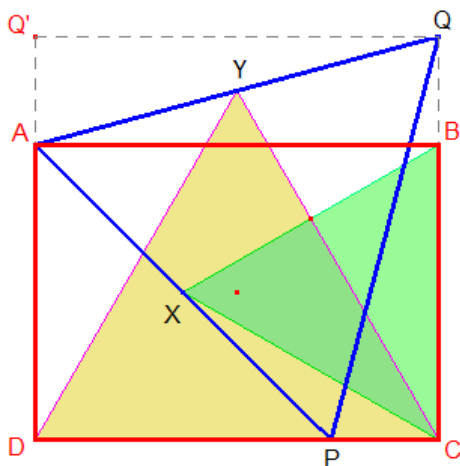
Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Una vez realizada la construcción considerada, observamos los siguientes hechos de interés:

Hecho nº 1:

El punto X es punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo ADP al ser X vértice del triángulo equilátero BCX y, por tanto pertenecerá a la paralela media de los lados del rectángulo AB y CD . De este modo, X es el centro de la circunferencia que pasa por los vértices de dicho triángulo rectángulo ADP .

En concreto, $XA = XD = XP$

Hecho nº 2:

El punto Y es punto medio de la hipotenusa del triángulo rectángulo ABQ al ser Y vértice del triángulo equilátero DCY y, por tanto pertenecerá a la paralela media de los lados del rectángulo AB y QQ' . De este modo, Y es el centro de la circunferencia que pasa por los vértices de dicho triángulo rectángulo ABQ .

En concreto, $YA = YB = YQ$

Hecho nº 3:

El punto Y está situado sobre la mediatriz del lado BX y, por tanto, $YA = YB = YQ = YX$

Hecho nº 4:

De los hechos anteriores, tenemos que el triángulo AXY es el triángulo medial del triángulo APQ y que dos de sus lados son iguales $YA = YX$. Nos faltará demostrar, para nuestro propósito, la igualdad con el tercer lado AX .

$$DA'^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow DA' = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$
$$AY^2 = AA'^2 + A'Y^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \text{ En definitiva:}$$

$$AY^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a - b \right)^2 + \left(\frac{a}{2} \right)^2$$

$$X'C^2 = XC^2 - XX'^2 = b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow X'C = \frac{\sqrt{3}}{2}b$$
$$XA^2 = XD^2 = X'D^2 + XX'^2 = \left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$
$$XA^2 = \left(a - \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 - \sqrt{3}ab + b^2$$

$$AY^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 - \sqrt{3}ab + b^2$$

El triángulo AXY , medial del APQ , será equilátero y del mismo modo lo será así el propio triángulo APQ , **c.q.d.**

