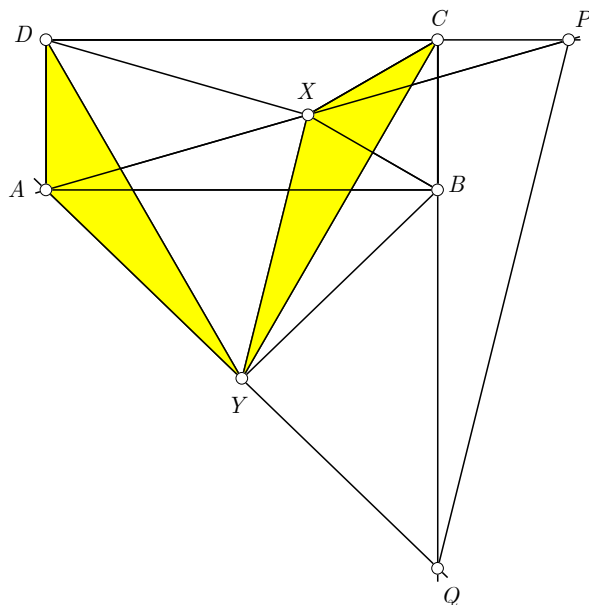


Problema 663. Sea $ABCD$ un rectángulo. Se construyen triángulos equiláteros BCX y DCY de modo que estos triángulos comparten algunos de sus puntos interiores con los puntos interiores del rectángulo. Las rectas AX y CD se cortan en P , y las rectas AY y BC se cortan en Q . Probar que el triángulo APQ es equilátero.

XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas Cochabamba (Bolivia, 2012)

Soluzione di Ercole Suppa.



Si dimostra facilmente che $XA = XD$ e $YA = YB$, dato che $\triangle BCX$ è equilatero. Inoltre X ed Y sono punti medi di AP e AQ rispettivamente, in quanto:

$$\angle DPX = 90^\circ - \angle DAP = 90 - \angle XDA = \angle XDP \Rightarrow XA = XD = XP$$

$$\angle YQB = 90^\circ - \angle BAQ = 90 - \angle ABY = \angle YBQ \Rightarrow YA = YB = YQ$$

Osserviamo che $\triangle DAY \cong \triangle CXY$ per il primo criterio di congruenza, essendo:

$$AD = BC = CX, \quad DY = CY, \quad \angle ADY = 30^\circ = \angle XCY$$

Pertanto

$$YA = YX \quad (1)$$

$$\angle AYD = \angle XYC \quad (2)$$

Dalla (2) discende che

$$\angle AYX = \angle AYD + \angle DYX = \angle XYC + \angle DYX = \angle DYC = 60^\circ \quad (3)$$

Da (1) e (3) discende che $\triangle AXY$ è equilatero. Pertanto, essendo $XA = XP$ e $YA = YQ$, anche $\triangle APQ$ è equilatero. $\square$