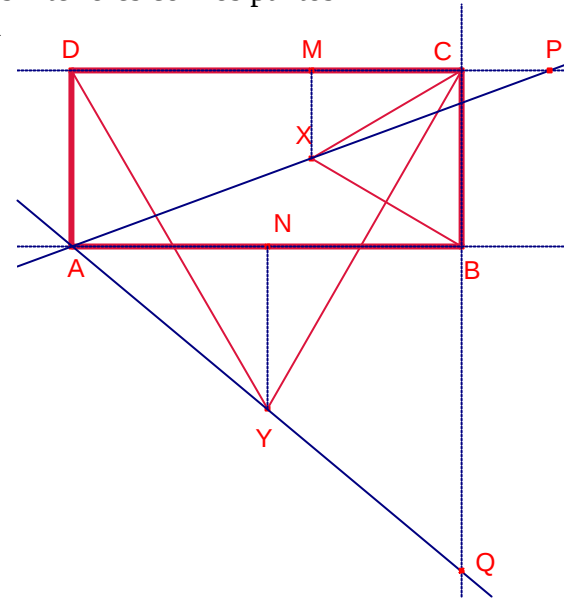


Problema 663.-

1.- Sea ABCD un rectángulo. Se construyen triángulos equiláteros BCX y DCY de modo que estos triángulos comparten algunos de sus puntos interiores con los puntos interiores del rectángulo. Las rectas AX y C D se cortan en P , y las rectas AY y BC se cortan en Q. Probar que el triángulo APQ es equilátero.

XXVII Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas
Cochabamba (BOLIVIA,2012)



Solución de Ricard Peiró:

$\overline{BX} = \overline{AD}$, $\overline{AB} = \overline{BF}$, $\angle ABX = \angle ADY = 30^\circ$.

Entonces, los triángulos $\triangle ABX$, $\triangle YDA$ son iguales.

$\overline{AX} = \overline{AY}$.

Sea $\alpha = \angle XAB$.

$\angle AXB = \angle DAY = 150^\circ - \alpha$.

Entonces, $\angle XAY = 60^\circ$.

$\overline{AX} = \overline{AY}$ i $\angle XAY = 60^\circ$ entonces $\triangle AXY$ es equilátero.

Sea M la proyección de X sobre CD.

Sea N la proyección de Y sobre AB.

$\overline{XM} = \frac{1}{2} \overline{BC}$.

Los triángulos rectángulos $\triangle PMX$, $\triangle PDA$ son semejantes y la razón es 1:2.

Entonces, $\overline{PX} = \overline{AX}$. $\overline{AP} = 2 \cdot \overline{AX}$.

$\overline{AN} = \frac{1}{2} \overline{AB}$.

Los triángulos rectángulos $\triangle ANY$, $\triangle ABQ$ son semejantes y la razón es 1:2.

Entonces, $\overline{AQ} = 2 \cdot \overline{AY}$.

Entonces, $\overline{AP} = \overline{AQ}$, $\angle PAQ = 60^\circ$, por tanto, el triángulo $\triangle APQ$ es equilátero.