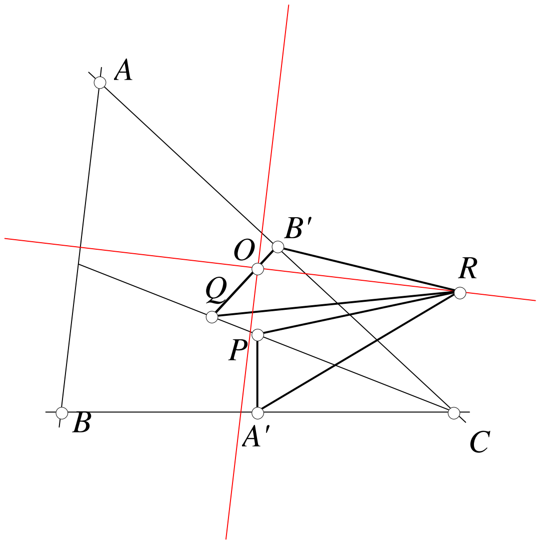
Problema 664 de *triánguloscabri*. *Sean ABC un triángulo y R la intersección de la bisectriz del ángulo C con la circunferencia circunscrita. Las mediatrices de los lados BC y CA cortan dicha bisectriz en P y Q. Sean A' y B' los puntos medios de los lados BC y AC. Demostrar que las áreas de los triángulos $PA'R$ y $QB'R$ son iguales.*

Solución de *Francisco Javier García Capitán*



Usemos coordenadas baricéntricas. Consideremos un punto cualquiera R del plano del triángulo ABC e impongamos que los triángulos $PA'R$ y $QB'R$ tienen la misma área.

La mediatriz del lado BC, que pasa por los puntos $A' = (0 : 1 : 1)$ y $O = (a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$, tiene ecuación $(b^2 - c^2)x + a^2(y - z) = 0$. La bisectriz del ángulo C, que une el vértice $C = (0 : 0 : 1)$ con el incentro $I = (a : b : c)$ tiene ecuación $bx - ay = 0$. Ambas rectas se cortan en el punto $P = (a^2 : ab : ab + b^2 - c^2)$.

De igual forma se obtiene el punto $Q = (ab : b^2 : a^2 + ab - c^2)$. Observemos las coordenadas de ambos puntos tienen la misma suma.

Entonces, siendo $R = (x : y : z)$, tomando como unidad el área del triángulo ABC y llamando $(PA'R)$ y $(QB'R)$ a las áreas de los triángulos $PA'R$ y $QB'R$, tendremos que

$$(PA'R) = (QB'R) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ a^2 & ab & a^2 + ab - c^2 \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ ab & b^2 & ab + b^2 - c^2 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando, obtenemos que R deberá estar bien sobre la recta de ecuación $c^2(x - y) + (a^2 - b^2)z = 0$, que es la mediatriz del lado AB, o bien sobre la recta de ecuación $(2b^2 - c^2)x + (2a^2 - c^2)y - (a^2 + b^2)z = 0$. Se puede comprobar que ésta es la perpendicular por O a la anterior.

Como el punto R del enunciado pertenece a la mediatriz de AB, el problema queda resuelto.