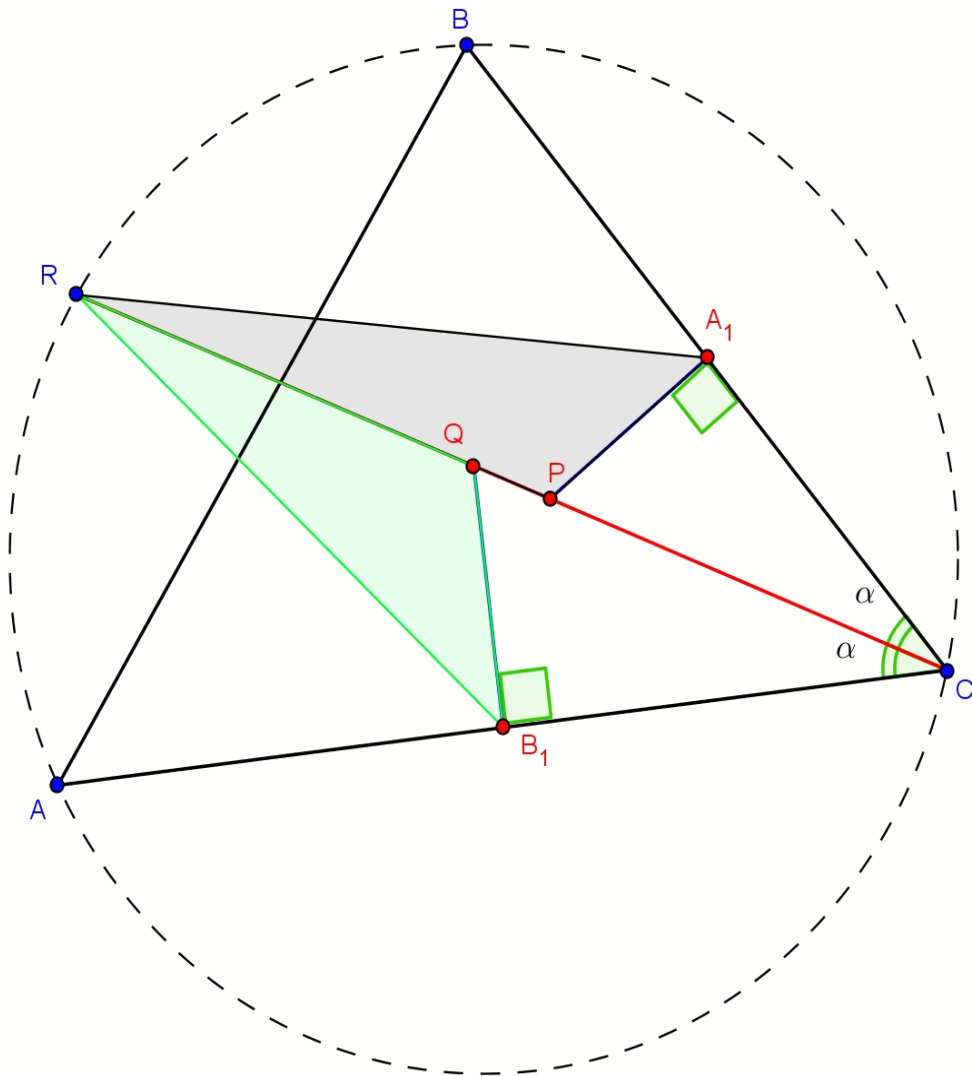


Problema 664.

Sea ABC un triángulo y consideremos la bisectriz de C , que corta en R a la circunferencia circunscrita. Las mediatrices de los lados a y b cortan a la bisectriz dada en P y Q . Sean A' y B' los puntos medios de los lados BC y AC . Demostrar que las áreas de los triángulos $PA'R$ y $QB'R$ son iguales.

Solución Presentada Por Juan Felipe Crisóstomo Ramos.

Construiremos el triángulo según lo descrito por el problema:

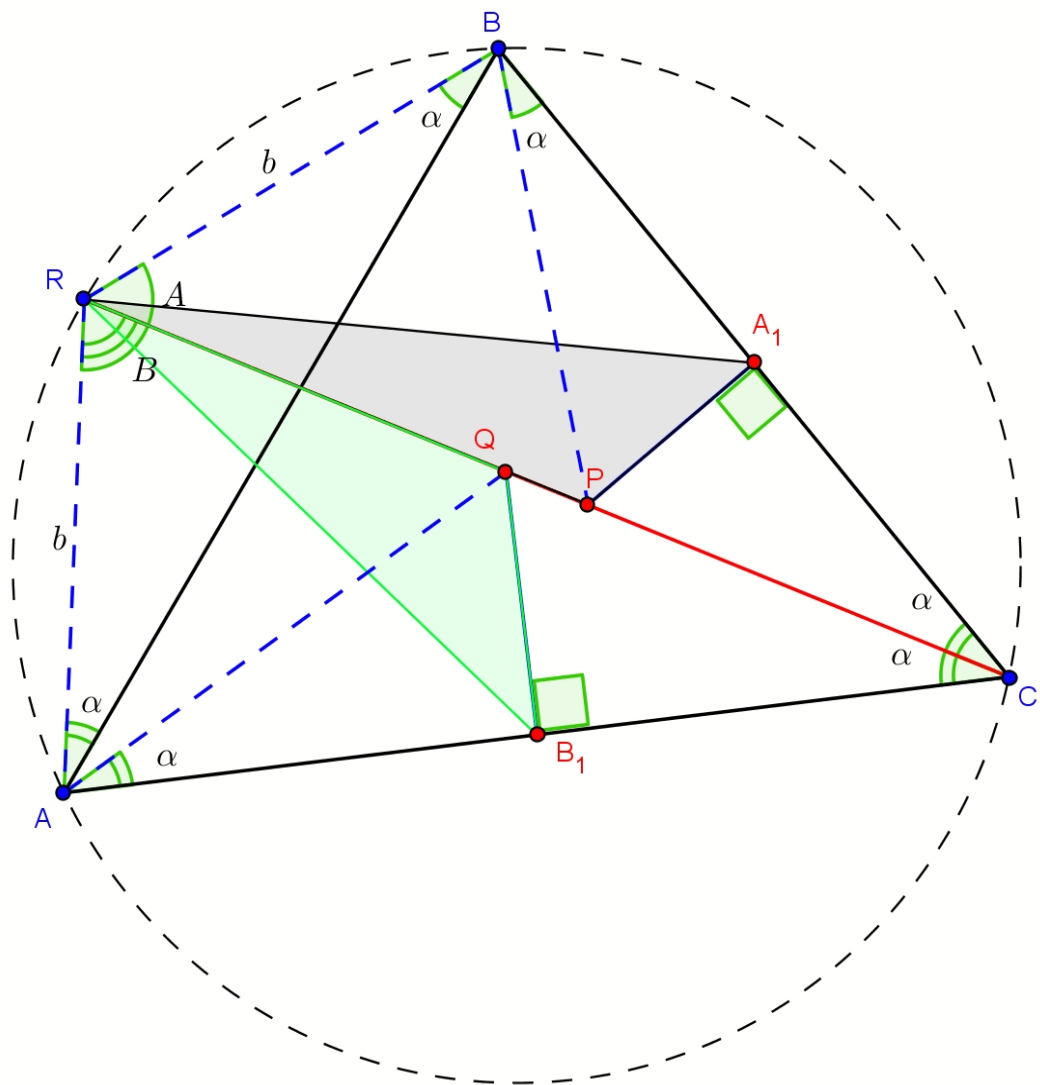


Paso 1: Comenzaremos examinando el gráfico , rescatando así que $AR = RB$.

$$\text{Área } (RB''Q) = \left(\frac{1}{2}\right)(RQ)(QB'')(\text{Sen } (90^\circ + \alpha))$$

$$\text{Área } (RA''P) = \left(\frac{1}{2}\right)(PA'')(RP)(\text{Sen } (90^\circ + \alpha))$$

Paso 2 : Trazaremos los segmentos AR , RB , AQ y BP



Paso 3: Notaremos que $m\angle RAQ = m\angle BAC = A$

. $m\angle RBP = m\angle ABC = B$

. Por propiedades en la circunferencia $m\angle ABC = m\angle ARC = B$, $m\angle BAC = m\angle BRC = A$

Paso 4: Finalmente notamos que los triángulos RBP y RAQ son congruentes. (Caso A.L.A)

Por tal motivo :

$$.RQ=BP$$

$$.RP = AQ$$

Pero : . BP=PC (porque el triangulo BPC es isósceles)
. AQ = QC (porque el triangulo AQC es isósceles)

En conclusion :

$$. RP= AQ = QC$$

$$. RQ = BP = PC$$

Pero los triángulos QB''C y PA''C son semejantes ,entonces se cumple :

$$. QC/QB'' = PC / PA'' \qquad \qquad \qquad QB''= QC. k = RP.k \quad , \quad PA''=PC.k=RQ.k$$



Finalmente:

$$\text{Área (RQB'')} = (\frac{1}{2}) (RQ) (QB'')(\text{Sen}(90^\circ+\alpha)) = (\frac{1}{2}) (RQ) (RP.k)(\text{Sen}(90^\circ+\alpha))$$

$$\text{Área (RPA'')}= (\frac{1}{2}) (RP) (PA'') (\text{Sen}(90^\circ+\alpha))= (\frac{1}{2}) (RP) (RQ.k)(\text{Sen}(90^\circ+\alpha))$$

$$\text{Por lo tanto } \text{Área (RQB'')} = \text{Área (RPA'')}$$