

Problema 664

Siga $\triangle ABC$ un triangle i considerem la bisectriu C , que talla en R la circumferència circumscrita.

Les mediatris dels costats a i b tallen la bisectriu donada en P i Q .

Siguen A' , B' els punts migs dels costats $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$.

Demostreu que les àrees dels triangles $\triangle PA'R$ i $\triangle QB'R$ són iguals.

Solució de Ricard Peiró:

Siga O el circumcentre.

$$\angle CQB' = 90^\circ - \frac{C}{2}, \quad \angle CPA' = 90^\circ - \frac{C}{2}.$$

Aleshores, $\overline{OP} = \overline{OQ}$, per tant la potència de Q sobre la circumferència és igual a la potència de P sobre la circumferència.

$$\overline{CQ} \cdot \overline{RQ} = \overline{CP} \cdot \overline{RP}.$$

$$\text{Notem que } \angle B'QR = \angle A'PR = 90^\circ + \frac{C}{2}.$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle CB'Q$:

$$\overline{CQ} = \frac{\overline{QB'}}{\sin \frac{C}{2}} \quad (2)$$

Aplicant raons trigonomètriques al triangle rectangle $\triangle CA'P$:

$$\overline{CP} = \frac{\overline{PA'}}{\sin \frac{C}{2}} \quad (3)$$

Substituint les expressions (2) (3) en l'expressió (1):

$$\overline{QB'} \cdot \overline{RQ} = \overline{PA'} \cdot \overline{RP}.$$

$$\overline{QB'} \cdot \overline{RQ} \cdot \frac{\sin 90^\circ + \frac{C}{2}}{2} = \overline{PA'} \cdot \overline{RP} \cdot \frac{\sin 90^\circ + \frac{C}{2}}{2}.$$

Aleshores, les àrees dels triangles $\triangle PA'R$ i $\triangle QB'R$ són iguals.

