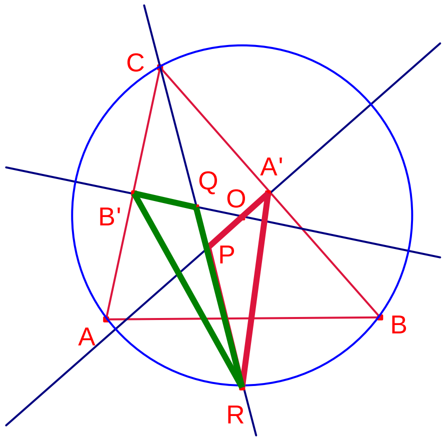
Problema 664

Sea $\overset{\Delta}{ABC}$ un triángulo y consideremos la bisectriz C, que corta en R la circunferencia circunscrita.
Las mediatrices de los lados a y b cortan la bisectriz dada en P y Q.
Sean A’, B’ los puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.

Demostrar que las áreas de los triángulos $\overset{\Delta}{PA'R}$ y $\overset{\Delta}{QB'R}$ son iguales.



Solución:
Sea O el circuncentro.

$\angle CQB' = 90º - \frac{C}{2}$, $\angle CPA' = 90º - \frac{C}{2}$.

Entonces, $\overline{OP} = \overline{OQ}$, por tanto la potencia de Q sobre la circunferencia es igual a la potencia de P sobre la circunferencia.
$\overline{CQ} \cdot \overline{RQ} = \overline{CP} \cdot \overline{RP}$.

Notemos que $\angle B'QR = \angle A'PR = 90º + \frac{C}{2}$.

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{CB'Q}$:

$$\overline{CQ} = \frac{\overline{QB'}}{\sin\frac{C}{2}} \qquad (2)$$

Aplicando razones trigonométricas al triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{CA'P}$:

$$\overline{CP} = \frac{\overline{PA'}}{\sin\frac{C}{2}} \qquad (3)$$

Substituyendo las expresiones (2) (3) en la expresión (1):
$\overline{QB'} \cdot \overline{RQ} = \overline{PA'} \cdot \overline{RP}$.

$$\overline{QB'} \cdot \overline{RQ} \cdot \frac{\sin 90º + \frac{C}{2}}{2} = \overline{PA'} \cdot \overline{RP} \cdot \frac{\sin 90º + \frac{C}{2}}{2}.$$

Entonces, las áreas de los triángulos $\overset{\Delta}{PA'R}$ y $\overset{\Delta}{QB'R}$ son iguales.