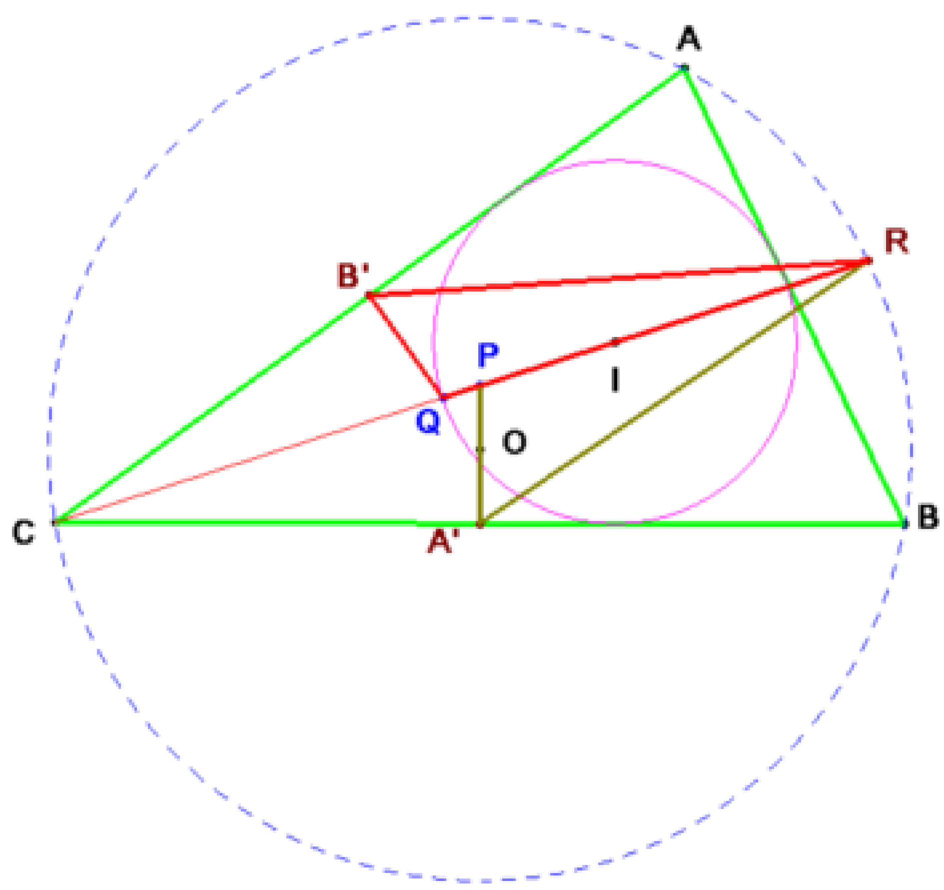
***Problema 664**.- Sea ABC un triángulo y consideremos la bisectriz de C, que corta en R a la circunferencia circunscrita. Las mediatrices de los lados a y b cortan a la bisectriz dada en P y Q. Sean A' y B' los puntos medios de los lados BC y AC. Demostrar que las áreas de los triángulos PA'R y QB'R son iguales.*

Jay Warendorff (2012):

http://demonstrations.wolfram.com/TwoTrianglesOfEqualAreaOnEitherSideOfAnAngleBisector/

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Usaremos coordenadas baricéntricas para resolver el problema.

El área de un triángulo cuando sus vértices vienen dados en coordenadas baricéntricas absolutas respecto del triángulo ABC, se relaciona con la de éste por la expresión:

$$\frac{Área(MNP)}{Área(ABC)} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

siendo $M(x_1,x_2,x_3)$, $N(y_1,y_2,y_3)$, $P(z_1,z_2,z_3)$ las coordenadas de los vértices.

Los objetos geométricos que intervienen, en estas coordenadas, se expresan como siguen: Punto medio de AC: $\boldsymbol{B'}=(\mathbf{1}:\mathbf{0}:\mathbf{1})$ y punto medio de BC: $\boldsymbol{A'}=(\mathbf{0}:\mathbf{1}:\mathbf{1})$.

Bisectriz de C: $\boldsymbol{bx=ay}$; mediatriz de BC: $\boldsymbol{(b^2-c^2)x+a^2y-a^2z=0}$; mediatriz de AC: $\boldsymbol{-b^2x+(c^2-a^2)y+b^2z=0}$ y circunferencia circunscrita del triángulo ABC: $\boldsymbol{a^2yz+b^2zx+c^2xy=0}$.

A partir de aquí vamos a calcular las coordenadas de los cinco vértices distintos de los dos triángulos resolviendo los sistemas pertinentes.

Se obtienen: $\boldsymbol{R=(a(a+b):b(a+b):-c^2)}$; $\boldsymbol{P=(a^2:ab:b^2-c^2+ab)}$; $\boldsymbol{Q=(ab:b^2:a^2-c^2+ab)}$.

Las coordenadas absolutas las obtenemos dividiendo cada punto por la suma de sus coordenadas.

$$a(a+b)+b(a+b)-c^2=(a+b)^2-c^2=(a+b+c)(a+b-c)=a^2+ab+b^2-c^2+ab=ab+b^2+a^2-c^2+ab=4s(s-c)$$

, siendo s el semiperímetro de ABC.

Teniendo esto en cuenta pasamos al cálculo.

Para el triángulo $B'RQ$ el determinante formado por sus coordenadas es

$$\det(B'RQ)=\frac{1}{32s^2(s-c)^2}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a(a+b) & b(a+b) & -c^2 \\ ab & b^2 & a^2-c^2+ab \end{vmatrix}=\frac{ba}{8s(s-c)}.$$

Para el triángulo $A'PR$ tenemos

$$\det(A'PR)=\frac{1}{32s^2(s-c)^2}\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a^2 & ab & b^2-c^2+ab \\ a(a+b) & b(a+b) & -c^2 \end{vmatrix}=\frac{ab}{8s(s-c)}.$$

Como ambos determinantes son iguales (valdría también si son opuestos), sus áreas también lo son y con esto se concluye el problema. ∎