

Problema 665, propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Valladolid:

Si A , B y C son los ángulos de un triángulo, siendo A el mayor, probar que:

$$\prod_{\text{cíclico}} \cos \frac{A}{2} - \prod_{\text{cíclico}} \sin \frac{A}{2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow A \leq 90^\circ.$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo:

Sean p , R y r el semiperímetro, el circunradio y el inradio del triángulo, respectivamente.

$$\text{De}^{(1)} \prod_{\text{cíclico}} \cos \frac{A}{2} = \frac{p}{4R} \text{ y } \prod_{\text{cíclico}} \sin \frac{A}{2} = \frac{r}{4R}, \text{ resulta: } \prod_{\text{cíclico}} \cos \frac{A}{2} - \prod_{\text{cíclico}} \sin \frac{A}{2} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow p - r \geq 2R \Leftrightarrow A \leq 90^\circ.$$

(1) <http://www.cut-the-knot.org/triangle/RelationsInTriangle.shtml>.

(2) <http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/sol/sol647compljbr.htm>.