Problema 665

Problema propuesto por Juan-Bosco Romero Márquez, Departamento de Álgebra, Geometría, y Topología, Universidad de Valladolid, Valladolid.

Sean A,B y C, los ángulos de un triangulo, en el que A, es ángulo mayor, probar que:

$$\prod_{ciclico} Cos\frac{A}{2} - \prod_{ciclico} Sin\frac{A}{2} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \frac{1}{2} \Leftrightarrow A \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 90$$

Romero, JB (2012): Comunicación personal.

Solución de Juan-Bosco Romero Márquez, Departamento de Álgebra, Geometría, y Topología, Universidad de Valladolid, Valladolid

Notación.

Con las notaciones usuales, en los triángulos, denotamos por p, r, y R, el semí-perímetro, radio círculo inscrito, radio del círculo circunscrito, respectivamente, al Triángulo ABC:

Si f es una función de una variable, denotamos por

$$\sum_{ciclica} f(a) = f(a) + f(b) + f(c); \quad \prod_{ciclico} f(a) = f(a) f(b) f(c).$$

Teniendo en cuenta las fórmulas:

$$\sum_{ciclica} SenA = 4\prod_{ciclico} Cos\frac{A}{2} = \frac{p}{R}; \quad \sum_{ciclica} CosA = \frac{r}{R} = 4\prod_{ciclico} Sen\frac{A}{2}.$$

Sea la expresión:

$$E = \prod_{ciclico} Cos\frac{A}{2} - \prod_{ciclico} Sen\frac{A}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\left(4\prod_{ciclico} Cos\frac{A}{2} - 4\prod_{ciclico} Sen\frac{A}{2} - 2\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{p}{R} - \frac{r}{R} - 2\right) = \frac{1}{4}\left[\frac{p-(r+2R)}{R}\right] \quad (1).$$

Desde [1], *tenemos el siguiente resultado:*

11. *Special triangles.*

11.27 *Depending upon the fact whether a triangle is acute, right or obtuse,*

1) $p > 2R + r$ *o* $p = r + 2R$ *o* $p < 2R + r$*., etc.*

Véase, Cianberlini; Boll.Un.Mat.Ital.(2) (1943), 37 – 41.

Teniendo en cuenta lo anterior en (1), *obtenemos que:*

$$E = \frac{p-(r+2R)}{4R} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0 \Leftrightarrow A \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} 90.$$

Y, el problema queda resuelto.

Bibliografía:

[1] *O. Bottema y otros; Geometric Inequalities, Wolters – Noordhoff Publishing, Groningen,* 1969, *The Netherlands*

Avila, 14, de Noviembre, 2012