Sea $\widehat{ABC}$ un triángulo no equilátero, $a = BC, b = CA$ y $c = AB$. Hallar el lugar geométrico $\mathcal{E}$ de los puntos M tales que $(b^2 - c^2)MA^2 + (c^2 - a^2)MB^2 + (a^2 - b^2)MC^2 = 0$. Demostrar que $\mathcal{E}$ contiene al centro de la circunferencia circunscrita y al centro de gravedad de $\widehat{ABC}$. Deducir un tercer punto de este conjunto.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **666**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Quincena del 1 al 15 de diciembre de 2012

—— - ——

El lugar geométrico pedido es la **recta de Euler** de $\widehat{ABC}$. Se trata de una situación particular del siguiente resultado:

Dados en el plano un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto, que se expresa en coordenadas baricéntricas homogéneas respecto a él, por $P(u : v : w)$, el lugar geométrico de los puntos $M(x : y : z)$ que satisfacen a:

$$u\overline{MA}^2 + v\overline{MB}^2 + w\overline{MC}^2 = 0,$$

es una cónica $\mathcal{C}$, que degenera en el producto de rectas en los casos:

1. *Si P está en la recta del infinito, la cónica es la recta del infinito junto con la polar de P respecto a la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$.*
2. *Si P está en la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$, la cónica degenera en el producto de dos recta imaginarias que se cortan en P.*

Para cualquier otra ubicación del punto P, la cónica carece de puntos.

Utilizando las expresiones de la distancia de puntos en coordenadas baricéntricas (Geometría métrica y proyectiva en el plano con coordenadas baricéntricas, A. Montesdeoca), el lugar geométrico $\mathcal{C}$ de los puntos $M(x : y : z)$ tiene por ecuación:

$$\underset{\substack{abc\\xyz}}{\mathfrak{S}}\ (c^2v + b^2w)x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)uyz = 0.$$

Se trata de una cónica de matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 2\left(wb^2 + c^2v\right) & \left(a^2 + b^2 - c^2\right)w & \left(a^2 - b^2 + c^2\right)v \\ \left(a^2 + b^2 - c^2\right)w & 2\left(wa^2 + c^2u\right) & \left(b^2 + c^2 - a^2\right)u \\ \left(a^2 - b^2 + c^2\right)v & \left(b^2 + c^2 - a^2\right)u & 2\left(va^2 + b^2u\right) \end{pmatrix}$$

Cuyo determinante es:

$$\Delta = 32\ \text{área}(\widehat{ABC})^2(u + v + w)(a^2vw + b^2wu + c^2uv).$$

Por tanto, la cónica degenera cuando P está en la recta del infinito o sobre la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$.

I) Cuando el punto P está en la recta del infinito $(u + v + w = 0)$, esta ecuación se descompone de la forma:

$$(x + y + z)\left((b^2w + c^2v)x + (c^2u + a^2w)y + (a^2v + b^2w)z\right) = 0.$$

Es decir, el lugar geométrico consta de la recta del infinito y de la polar de $P(u : v : w)$ respecto al circunferencia circunscrita $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$; por tanto, se trata de un diámetro (pasa por su centro) perpendicular a la dirección determinada por P

Ocurre que, si Q (sobre la circunferencia circunscrita) es el conjugado isogonal de P, el tripolo del diámetro lugar geométrico correspondiente a P es el punto $DC(Q)$, descrito en ETC justo antes del centro X_{2979}.

En particular, si $P(b^2 - c^2 : c^2 - a^2 : a^2 - b^2) = X_{523}$ (conjugado isogonal del foco de la parábola de Kiepert), su polar es el lugar $\mathcal{E}$ pedido en el enunciado del problema propuesto: recta de Euler.

II) Cuando el punto P está sobre la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$ ($a^2vw + b^2wu + c^2uv = 0$), la ecuación de la cónica $\mathcal{C}$ se descompone en el producto de dos rectas imaginarias que se cortan en el punto P, ya que esta cónica degenerada corta, por ejemplo, a la recta BC en los puntos de coordenadas:

$$(0 : 2(b^2u + a^2v) : (a^2 - b^2 - c^2 \pm 2Si)u).$$

El punto singular se obtiene resolviendo las ecuaciones:

$$
\begin{aligned}
&(2c^2v+2b^2w)x+(a^2w+b^2w-c^2w)y+(a^2v-b^2v+c^2v)z=0,\\
&(a^2w+b^2w-c^2w)x+(2c^2u+2a^2w)y+(-a^2u+b^2u+c^2u)z=0,\\
&(a^2v-b^2v+c^2v)+(x-a^2u+b^2u+c^2u)y+2b^2uz+2a^2vz=0
\end{aligned}
$$

$$a^2vw+b^2wu+c^2uv=0.$$

Que claramente se satisfacen por las coordenadas de $P(u:v:w)$.

III) Una forma de averiguar que, cuando P no está en el infinito ni en la circunferencia circunscrita, la cónica $\mathcal{C}$ carece de puntos, podría ser demostrando que tienen el mismo signo(?) las tres cantidades siguientes:

$$2(c^2v+b^2w)$$

$$
\begin{vmatrix} 2\left(wb^2+c^2v\right) & \left(a^2+b^2-c^2\right)w \\ \left(a^2+b^2-c^2\right)w & 2\left(wa^2+c^2u\right) \end{vmatrix} = \\
-w^2a^4+2b^2w^2a^2+2c^2w^2a^2+4c^2vwa^2-b^4w^2-c^4w^2+2b^2c^2w^2+4c^4uv+4b^2c^2uw,
$$

$$\Delta = 32 \text{ área}(\widehat{ABC})^2(u+v+w)(a^2vw+b^2wu+c^2uv).$$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2517.pdf