

Problema 666

3.- Sea ABC un triángulo no equilátero, $a=BC$, $b=CA$ y $c=AB$.

Hallar el lugar geométrico E de M tales que $(b^2 - c^2) MA^2 + (c^2 - a^2) MB^2 + (a^2 - b^2) MC^2 = 0$.

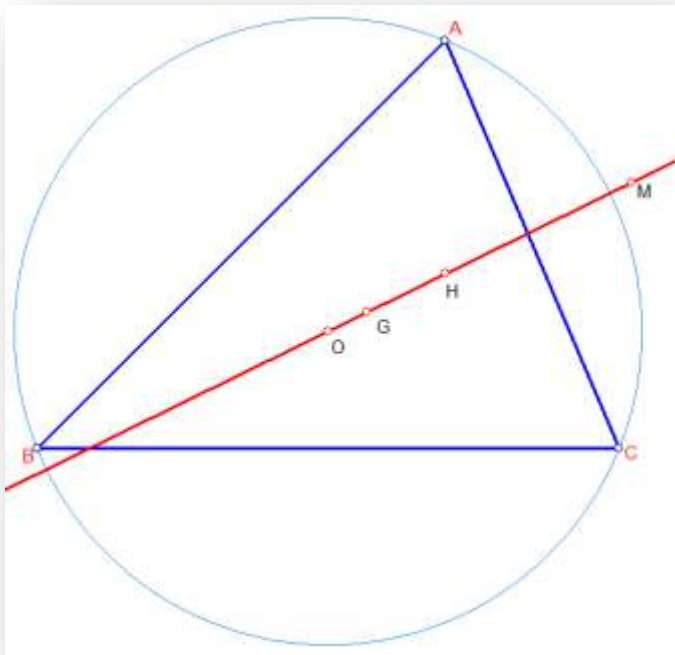
Demostrar que E contiene al centro de la circunferencia circunscrita y al centro de gravedad de ABC. Deducir un tercer punto de este conjunto. (p. 257)

[Prépa Maths \(1998\) Hachette Supérieur.](#)

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Usamos la Geometría de Coordenadas. Sea así el punto $M(x, y)$. Observamos que en la ecuación que define el Lugar Geométrico E no aparecerían términos cuadráticos en x e y , pues los coeficientes $(b^2 - c^2)$, $(c^2 - a^2)$ y $(a^2 - b^2)$ al sumarlos se cancelarían, lo que determina en el plano del triángulo una ecuación lineal con los términos en x e y . Por tanto, el Lugar Geométrico buscado es una recta.

Si ahora probamos que, en efecto, dicho Lugar E pasa por los puntos O (circuncentro) y G (baricentro) del triángulo ABC, entonces el Lugar E no es otro que la RECTA DE EULER. Por tanto también pasaría por el punto H (Ortocentro) de nuestro triángulo. De todas formas, probaremos directamente que el punto H también pertenece a dicho Lugar E.



1.- El punto O, circuncentro del triángulo ABC pertenece a dicho Lugar E.

Como $OA = OB = OC = R$, R =radio de la circunferencia circunscrita, se verifica trivialmente la relación dada $(b^2 - c^2).OA^2 + (c^2 - a^2).OB^2 + (a^2 - b^2).OC^2 = R^2[(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) + (a^2 - b^2)] = 0$

2.- El punto G, baricentro del triángulo ABC pertenece a dicho Lugar E.

Expresamos las medianas en función de los lados del triángulo del modo habitual:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2); \quad m_b^2 = \frac{1}{4}(2c^2 + 2a^2 - b^2); \quad m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Como quiera que

$$GA = \frac{2}{3}.m_a \rightarrow GA^2 = \frac{4}{9}.m_a^2 \rightarrow GA^2 = \frac{1}{9}.(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

$$GB^2 = \frac{1}{9} \cdot (2c^2 + 2a^2 - b^2), \quad GC^2 = \frac{1}{9} \cdot (2a^2 + 2b^2 - c^2)$$
$$\begin{aligned} & (b^2 - c^2).GA^2 + (c^2 - a^2).GB^2 + (a^2 - b^2).GC^2 = \\ &= (b^2 - c^2) \frac{1}{9} \cdot (2b^2 + 2c^2 + 2a^2 - 3a^2) + (c^2 - a^2) \frac{1}{9} \cdot (2c^2 + 2a^2 + 2b^2 - 3b^2) + (a^2 - b^2) \frac{1}{9} \cdot (2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 3c^2) = \\ &= \frac{1}{9} \cdot (2b^2 + 2c^2 + 2a^2) [\underbrace{(b^2 - c^2) + (c^2 - a^2) + (a^2 - b^2)}_0] - \frac{1}{3} \cdot [\underbrace{(b^2 - c^2)a^2 + (c^2 - a^2)b^2 + (a^2 - b^2)c^2}_0] = 0 \end{aligned}$$

Expresamos las medianas en función de los lados del triángulo del modo habitual:

que $A'O = \frac{1}{2}.CB^*$.

Por la potencia del punto A' respecto de la circunferencia circunscrita,

$$(R - A'O)(R + A'O) = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \rightarrow R^2 - A'O^2 = \frac{1}{4}a^2$$

$$HA^2 = 4.A'O^2 = 4.\left(R^2 - \frac{1}{4}a^2\right) = 4R^2 - a^2$$
$$HB^2 = 4R^2 - b^2, \quad HC^2 = 4R^2 - c^2.$$
$$\begin{aligned} & (b^2 - c^2).HA^2 + (c^2 - a^2).HB^2 + (a^2 - b^2).HC^2 = \\ & = (b^2 - c^2).(4R^2 - a^2) + (c^2 - a^2).(4R^2 - b^2) + (a^2 - b^2).(4R^2 - c^2) = \\ & = 4R^2.[\underbrace{(b^2 - c^2) + (c^2 - a^2) + (a^2 - b^2)}_0] - [\underbrace{(b^2 - c^2)a^2 + (c^2 - a^2)b^2 + (a^2 - b^2)c^2}_0] = 0 \end{aligned}$$