Problema 666

3.- Sea ABC un triángulo no equilátero, a=BC, b=CA y c=AB.

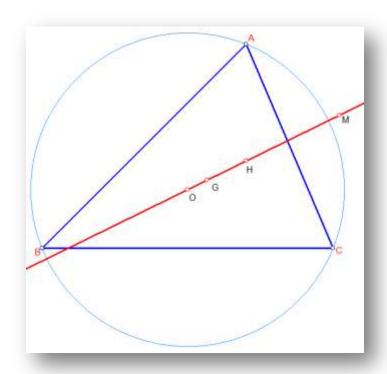
Hallar el lugar geométrico E de M tales que (b^2-c^2) $MA^2 + (c^2-a^2)$ $MB^2 + (a^2-b^2)$ $MC^2 = 0$. Demostrar que E contiene al centro de la circunferencia circunscrita y al centro de gravedad de ABC. Deducir un tercer punto de este conjunto. (p. 257)

Prépa Maths (1998) Hachette Superieur.

Solución de Florentino Damián Aranda Ballesteros, profesor del IES Blas Infante de Córdoba.

Usamos la Geometría de Coordenadas. Sea así el punto M(x,y). Observamos que en la ecuación que define el Lugar Geométrico E no aparecerían términos cuadráticos en x e y, pues los coeficientes (b^2-c^2) , (c^2-a^2) y (a^2-b^2) al sumarlos se cancelarían, lo que determina en el plano del triángulo una ecuación lineal con los términos en x e y. Por tanto, el Lugar Geométrico buscado es una recta.

Si ahora probamos que, en efecto, dicho Lugar E pasa por los puntos O (circuncentro) y G (baricentro) del triángulo ABC, entonces el Lugar E no es otro que la RECTA DE EULER. Por tanto también pasaría por el punto H (Ortocentro) de nuestro triángulo. De todas formas, probaremos directamente que el punto H también pertenece a dicho Lugar E.



1.- El punto O, circuncentro del triángulo ABC pertenece a dicho Lugar E.

Como OA = OB = OC = R, R=radio de la circunferencia circunscrita, se verifica trivialmente la relación dada $(b^2 - c^2).OA^2 + (c^2 - a^2).OB^2 + (a^2 - b^2).OC^2 = R^2[(b^2 - c^2)(c^2 - a^2) + (a^2 - b^2)] = 0$

2.- El punto G, baricentro del triángulo ABC pertenece a dicho Lugar E.

Expresamos las medianas en función de los lados del triángulo del modo habitual:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2); \ m_b^2 = \frac{1}{4}(2c^2 + 2a^2 - b^2); \ m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Como quiera que

$$GA = \frac{2}{3}.m_a \rightarrow GA^2 = \frac{4}{9}.m_a^2 \rightarrow GA^2 = \frac{1}{9}.(2b^2 + 2c^2 - a^2)$$

Y de similar manera, obtendríamos las otras dos expresiones:

$$GB^2 = \frac{1}{9}.(2c^2 + 2a^2 - b^2), GC^2 = \frac{1}{9}.(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Por tanto, la relación dada se expresaría en los siguientes términos:

$$(b^{2}-c^{2}).GA^{2} + (c^{2}-a^{2}).GB^{2} + (a^{2}-b^{2}).GC^{2} =$$

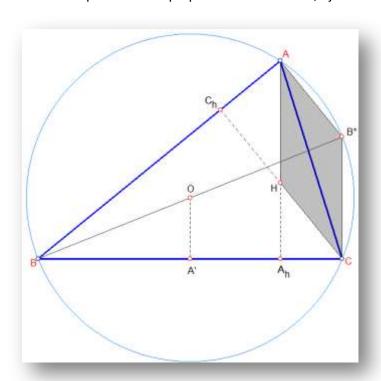
$$= (b^{2}-c^{2})\frac{1}{9}.(2b^{2}+2c^{2}+2a^{2}-3a^{2}) + (c^{2}-a^{2})\frac{1}{9}.(2c^{2}+2a^{2}+2b^{2}-3b^{2}) + (a^{2}-b^{2})\frac{1}{9}.(2a^{2}+2b^{2}+2c^{2}-3c^{2}) =$$

$$= \frac{1}{9}.(2b^{2}+2c^{2}+2a^{2})[\underbrace{(b^{2}-c^{2}) + (c^{2}-a^{2}) + (a^{2}-b^{2})}_{0}] - \frac{1}{3}.[\underbrace{(b^{2}-c^{2})a^{2} + (c^{2}-a^{2})b^{2} + (a^{2}-b^{2})c^{2}}_{0}] = 0$$

3.- El punto H, ortocentro del triángulo ABC pertenece a dicho Lugar E.

Expresamos las medianas en función de los lados del triángulo del modo habitual:

Si trazamos por C la recta perpendicular al lado BC, fijamos en la circunferencia circunscrita, el punto B.



Por tanto, BB* es un diámetro de ésta, verificándose

que
$$A'O = \frac{1}{2}.CB*$$
.

Si unimos el vértice A con el punto B*, este segmento AB* será perpendicular al lado AB del triángulo. De este modo el cuadrilátero AB'CH resultará ser un paralelogramo. En definitiva $HA = CB^* = 2.A'O$.

Por la potencia del punto A' respecto de la circunferencia circunscrita,

$$(R-A'O)(R+A'O) = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 \to R^2 - A'O^2 = \frac{1}{4}a^2$$

En definitiva,

$$HA^2 = 4.A'O^2 = 4.\left(R^2 - \frac{1}{4}a^2\right) = 4R^2 - a^2$$

Y de una manera similar, obtendríamos las otras dos expresiones:

$$HB^2 = 4R^2 - b^2$$
, $HC^2 = 4R^2 - c^2$.

Por tanto, la relación dada se expresaría en los siguientes términos:

$$(b^{2}-c^{2}).HA^{2}+(c^{2}-a^{2}).HB^{2}+(a^{2}-b^{2}).HC^{2} =$$

$$=(b^{2}-c^{2}).(4R^{2}-a^{2})+(c^{2}-a^{2}).(4R^{2}-b^{2})+(a^{2}-b^{2}).(4R^{2}-c^{2}) =$$

$$=4R^{2}.[\underbrace{(b^{2}-c^{2})+(c^{2}-a^{2})+(a^{2}-b^{2})}_{0}]-[\underbrace{(b^{2}-c^{2})a^{2}+(c^{2}-a^{2})b^{2}+(a^{2}-b^{2})c^{2}}_{0}]=0$$