

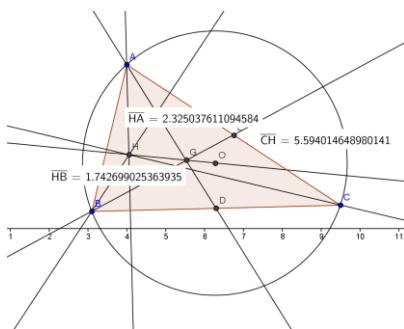
Problema 666

3.- Sea ABC un triángulo no equilátero, $a=BC$, $b=CA$ y $c=AB$. Hallar el lugar geométrico E de M tales que $(b^2-c^2) MA^2 + (c^2-a^2) MB^2 + (a^2-b^2) MC^2 = 0$.

Demostrar que E contiene al centro de la circunferencia circunscrita y al centro de gravedad de ABC. Deducir un tercer punto de este conjunto. (p. 257)

Prépa Maths (1998) Hachette Supérieur.

Solución del director.



Si M es el circuncentro, O, es

$$(b^2-c^2) MA^2 + (c^2-a^2) MB^2 + (a^2-b^2) MC^2 = (b^2-c^2) OA^2 + (c^2-a^2) OB^2 + (a^2-b^2) OC^2$$

$$= (b^2-c^2) R^2 + (c^2-a^2) R^2 + (a^2-b^2) R^2 = 0, \text{ luego pertenece a E.}$$

Sea $M=G$ el centro de gravedad de ABC.

Sabemos que si M_a es el punto medio de BA, la mediana es $AM_a = \sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{2}}$

$$\text{Así, es } AG = 1/3AM_a = \sqrt{\frac{2b^2+2c^2-a^2}{18}}$$

$$\text{Luego } AG^2 = \frac{2b^2+2c^2-a^2}{18}.$$

$$\text{De forma cíclica, } BG^2 = \frac{2a^2+2c^2-b^2}{18}, \text{ y } CG^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{18}$$

$$\text{Así, es } (b^2-c^2)GA^2 + (c^2-a^2)GB^2 + (a^2-b^2)GC^2 =$$

$$\begin{aligned} (b^2-c^2)\frac{2b^2+2c^2-a^2}{18} + (c^2-a^2)\frac{2a^2+2c^2-b^2}{18} + (a^2-b^2)\frac{2a^2+2b^2-c^2}{18} = \\ \frac{(2b^4+2b^2c^2-b^2a^2-2c^2b^2-2c^4+c^2a^2)}{18} + \\ + \frac{(2c^2a^2+2c^4-c^2b^2-2a^4-2a^2c^2+a^2b^2)}{18} + \\ \frac{(2a^4+2a^2b^2-a^2c^2-2b^2a^2-2b^4+b^2c^2)}{18} = 0 \end{aligned}$$

Así pues si M es G, pertenece al lugar E buscado.

Tomemos un triángulo concreto para estudiar el lugar pedido.

Sea, por ejemplo, A(0,0), B(p,q) y C(s,0), el triángulo en cuestión.

$$a^2=(p-s)^2+q^2; b^2=s^2; c^2=p^2+q^2.$$

Sea M(x,y) del lugar.

Es A(0,0), B(p,q) y C(s,0),

$$MA^2=x^2+y^2, MB^2=(x-p)^2+(y-q)^2, MC^2=(x-s)^2+y^2$$

$$a^2=(p-s)^2+q^2; b^2=s^2; c^2=p^2+q^2.$$

$$\text{Es: } (b^2-c^2)MA^2 + (c^2-a^2)MB^2 + (a^2-b^2)MC^2 =$$

$$(s^2-(p^2+q^2))(x^2+y^2) + ((p^2+q^2)-((p-s)^2+q^2))((x-p)^2+(y-q)^2) + (((p-s)^2+q^2)-s^2)((x-s)^2+y^2) =$$

$$(s^2x^2-p^2x^2-q^2x^2+s^2y^2-p^2y^2-q^2y^2) + (p^2+q^2-p^2-s^2+2ps-q^2)(x^2-2px+p^2+y^2-2qy+q^2) + (p^2-2ps+s^2+q^2-s^2)(x^2-2xs+s^2+y^2).$$

El coeficiente de x^2 de esta expresión cuadrática es:

$$(s^2-p^2-q^2) + (p^2+q^2-p^2-s^2+2ps-q^2) + (p^2-2ps+s^2+q^2-s^2) = 0.$$

El coeficiente de y^2 de esta expresión cuadrática es:

$$(s^2-p^2-q^2) + (p^2+q^2-p^2-s^2+2ps-q^2) + (p^2-2ps+s^2+q^2-s^2) = 0.$$

Así al ser nulos ambos E es una recta, que al contener al circuncentro y al centro de gravedad, es la recta de Euler.

Un tercer punto pedido por el problema es por tanto el ortocentro.

[Ver applets de Geogebra](#)

Sea H y supongamos el triángulo acutángulo .

Sea $AH_a = h_a$ la altura sobre el lado a. Sea $p = BH_a$

$$h_a^2 = b^2 - p^2.$$

$$h_a^2 = c^2 - (a-p)^2$$

$$\text{De ambas, } p = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2a}$$

$$\text{Así } h_a^2 = b^2 - p^2 = \frac{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4a^2}$$

Sea BH_b la altura sobre el lado B. Sea $m = AH_b$

$$\text{De manera análoga es } m = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}.$$

$$\text{O sea, } m^2 = \frac{-2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + a^4 + b^4 + c^4}{4b^2}$$

Los triángulos AH_aC y AH_bH son semejantes por ser rectángulos y tener común el ángulo en A.

Luego sus lados son proporcionales.

Así se tiene que :

$$\frac{AH}{AH_b} = \frac{AC}{AH_a}, \text{ de donde } (AH)^2 = \frac{a^2(-2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + a^4 + b^4 + c^4)}{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

De una manera análoga,

Es

$$\frac{BH}{BH_c} = \frac{BA}{BH_b}, \text{ de donde } (BH)^2 = \frac{b^2(-2b^2a^2 - 2b^2c^2 + 2a^2c^2 + a^4 + b^4 + c^4)}{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

$$\text{Por último, } (CH)^2 = \frac{c^2(-2c^2a^2 - 2c^2b^2 + 2a^2b^2 + a^4 + b^4 + c^4)}{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}$$

Así, es:

$$(b^2 - c^2) HA^2 + (c^2 - a^2) HB^2 + (a^2 - b^2) HC^2 =$$

$$(b^2 - c^2) \frac{a^2(-2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 + a^4 + b^4 + c^4)}{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4} + (c^2 - a^2) \frac{b^2(-2b^2a^2 - 2b^2c^2 + 2a^2c^2 + a^4 + b^4 + c^4)}{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4} + (a^2 - b^2) \frac{c^2(-2c^2a^2 - 2c^2b^2 + 2a^2b^2 + a^4 + b^4 + c^4)}{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4} = 0.$$

Es una expresión de 36 monomios de orden octavo que se compensan y anulan el valor total.

Sea ABC rectángulo en A. Es $H=A$, $HA^2=0$, $HB^2=c^2$, y $HC^2=b^2$.

$$(b^2 - c^2) HA^2 + (c^2 - a^2) HB^2 + (a^2 - b^2) HC^2 = (b^2 - c^2) 0 + (c^2 - a^2) c^2 + (a^2 - b^2) b^2 =$$

$$c^4 - a^2 c^2 + c^2 b^2 = c^2 (c^2 - a^2 + b^2) = 0.$$

Supongamos ABC obtusángulo en A.

Las expresiones son análogas al caso del acutángulo, anulándose también los 36 monomios de orden octavo.

Ricardo Barroso Campos

Jubilado.