

Problema 666. Sea ABC un triángulo no equilátero, $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$. Hallar el lugar geométrico E de M tales que

$$(b^2 - c^2) MA^2 + (c^2 - a^2) MB^2 + (a^2 - b^2) MC^2 = 0.$$

Demostrar que E contiene al centro de la circunferencia circunscrita y al centro de gravedad de ABC . Deducir un tercer punto de este conjunto.

Prépa Maths (1998) Hachette Supérieur

Soluzione di Ercole Suppa

Il luogo E è una retta come discende dal seguente:

TEOREMA. Dato un triangolo ABC e tre numeri reali α, β, γ tali che $\alpha + \beta + \gamma = 0$ il luogo geometrico dei punti M tali che

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = 0 \quad (*)$$

è una retta.

Dimostrazione. Fissiamo un sistema di coordinate cartesiane Oxy . Indicando con $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, $M(x, y)$ le coordinate dei punti A, B, C, M , con semplici calcoli si trova che il luogo $(*)$ ha equazione

$$(\alpha + \beta + \gamma)(x^2 + y^2) - 2(\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3)x - 2(\alpha y_1 + \beta y_2 + \gamma y_3)y + \alpha(x_1^2 + y_1^2) + \beta(x_2^2 + y_2^2) + \gamma(x_3^2 + y_3^2) = 0$$

e quindi, se $\alpha + \beta + \gamma = 0$, rappresenta una retta. ■

Poichè $(b^2 - c^2) + (c^2 - a^2) + (a^2 - b^2) = 0$, il luogo E è una retta.

La retta E passa per il circocentro in quanto se $M = O$ risulta $OA = OB = OC = R$ (=circonraggio), per cui

$$(b^2 - c^2) R^2 + (c^2 - a^2) R^2 + (a^2 - b^2) R^2 = 0.$$

La retta E passa per il baricentro in quanto se $M = G$ risulta $GA = \frac{2}{3}m_a$, $GB = \frac{2}{3}m_b$, $GC = \frac{2}{3}m_c$, per cui

$$(b^2 - c^2) \frac{4m_a^2}{9} + (c^2 - a^2) \frac{4m_b^2}{9} + (a^2 - b^2) \frac{4m_c^2}{9} = \frac{1}{9} \sum_{\text{ciclica}} (b^2 - c^2) (2b^2 + 2c^2 - a^2) = 0$$

Pertanto il luogo E è la **retta di Eulero** di $\triangle ABC$ e, di conseguenza, passa anche per l'ortocentro H . □