Problema 666 de *triánguloscabri*. *Sea ABC un triángulo no equilátero, $a = BC$, $b = CA$ y $c = AB$. Hallar el lugar geométrico E de los puntos M tales que $(b^2 - c^2)MA^2 + (c^2 - a^2)MB^2 + (a^2 - b^2)MC^2 = 0$. Demostrar que E contiene al centro de la circunferencia circunscrita y al centro de gravedad de ABC. Deducir un tercer punto de este conjunto.*

Si observamos que $(b^2-c^2)+(c^2-a^2)+(a^2-b^2) = 0$, podemos plantearnos el problema de forma más general, buscando el lugar geométrico de los puntos M tales que $uAM^2 + vBM^2 + wCM^2 = 0$, siendo $u + v + w = 0$, es decir, siendo $Q = (u : v : w)$ un punto del infinito, o también, para cualquier punto Q, infinito o no.

Primera solución de Francisco Javier García Capitán.

Comenzando con las fórmulas de las distancias de un punto ordinario $M = (x : y : z)$ $(x + y + z \neq 0)$ a los vértices del triángulo de referencia (ver *Introduction to Triangle Geometry*, de Paul Yiu, pág. 88):

$$AM^2 = \frac{c^2y^2 + 2S_Ayz + b^2z^2}{(x + y + z)^2}, \text{ etc.}$$

podemos obtener para un punto ordinario $Q = (u : v : w)$ la relación

$$\begin{aligned}&(x + y + z)^2 \left(uAM^2 + vBM^2 + wCM^2\right)\\ =&(x + y + z) \left(\sum_{\text{cíclica}} \left(b^2w + c^2v\right) x\right) - (u + v + w) \left(a^2yz + b^2zx + c^2xy\right),\end{aligned}$$

que puede demostrarse por simple desarrollo de los dos miembros. Según esto, si hacemos tender Q a infinito, es decir si hacemos $u + v + w = 0$, tendremos que $uAM^2+vBM^2+wCM^2 = 0$ si y solo si el punto M es infinito o está sobre la recta

$$(c^2v + b^2w)x + (a^2w + c^2u)y + (b^2u + a^2v)z = 0.$$

También por comprobación directa, esta recta siempre pasa por el circuncentro $O = (a^2S_A : b^2S_B : c^2S_C)$ y es perpendicular a la dirección dada por el punto Q.

En nuestro enunciado, $Q = (b^2 - c^2 : c^2 - a^2 : a^2 - b^2)$ es el punto del infinito del eje órtico, que es perpendicular a la recta de Euler que, por tanto, es la solución del problema. Como tercer punto de la recta de Euler podemos dar el ortocentro H.

Segunda solución de Francisco Javier García Capitán

Según vimos en mi solución del problema 380, si $Q = (u : v : w)$ es un punto ordinario $(u + v + w \neq 0)$, tenemos la fórmula

$$uAM^2 + vBM^2 + wCM^2 = (u + v + w)MQ^2 + \frac{a^2vw + b^2wu + c^2uv}{u + v + w}. \quad (1)$$

Haciendo $M = O$ tenemos que

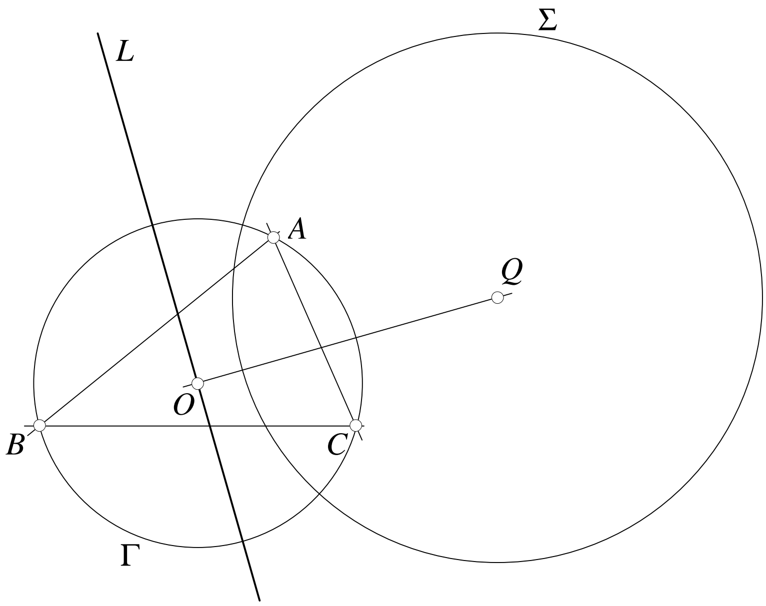
$$\begin{aligned}
&(u+v+w)R^2 = (u+v+w)OQ^2 + \frac{a^2vw + b^2wu + c^2uv}{u+v+w} \\
&\Rightarrow -\frac{a^2vw + b^2wu + c^2uv}{(u+v+w)^2} = OQ^2 - R^2
\end{aligned}$$

es la potencia de Q respecto de la circunferencia circunscrita Γ.

Ahora volviendo a (1),

$$\begin{aligned}
&uAM^2 + vBM^2 + wCM^2 = 0 \\
\Rightarrow &QM^2 = -\frac{a^2vw + b^2wu + c^2uv}{(u+v+w)^2} = OQ^2 - R^2,
\end{aligned}$$

por lo que $uAM^2 + vBM^2 + wCM^2 = 0$ si y solo si M está sobre una circunferencia Σ centrada en Q y ortogonal a Γ.



Si consideramos la recta OQ fija y hacemos que Q tienda al infinito, la circunferencia Σ tenderá a ser la recta L perpendicular a OQ por O.

Aplicando esto, como antes, al punto infinito $Q = (b^2-c^2 : c^2-a^2 : a^2-b^2)$, el problema queda resuelto.