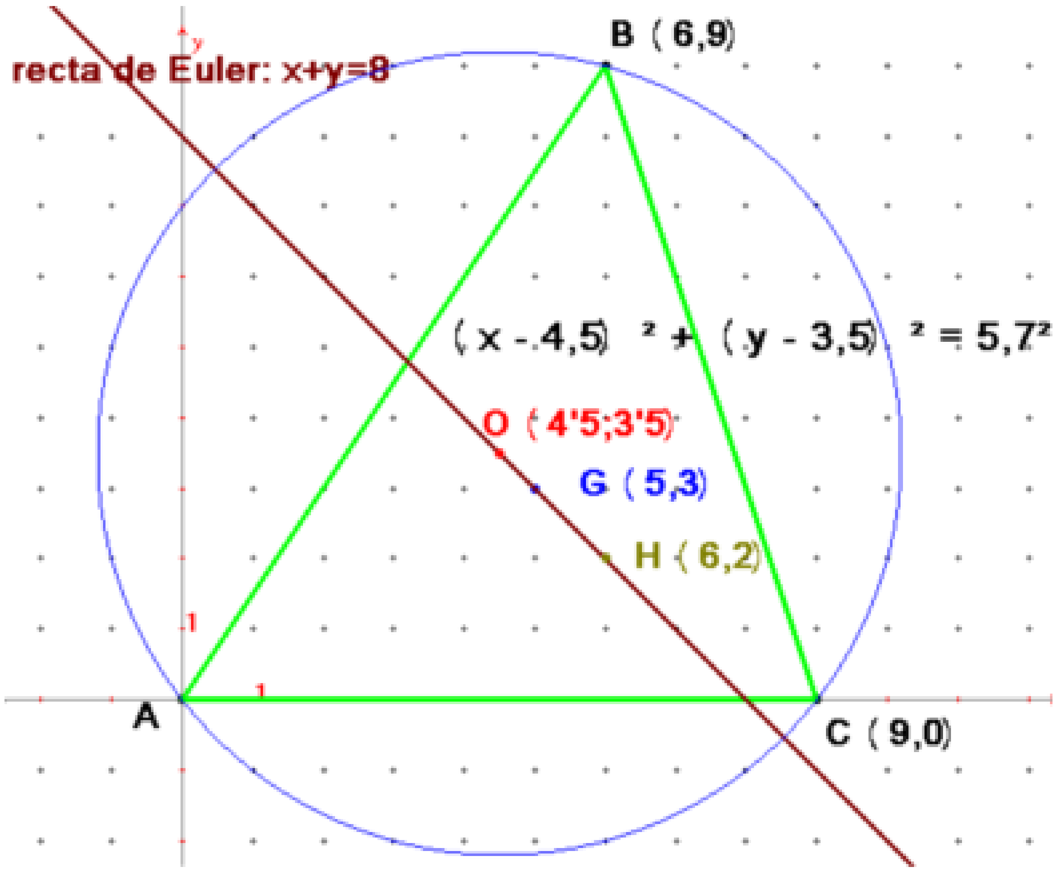
Problema 666

3.- *Sea ABC un triángulo no equilátero, a=BC, b=CA y c=AB. Hallar el lugar geométrico E de M tales que* $(b^2\text{-}c^2)\ MA^2 + (c^2\text{-}a^2)\ MB^2 + (a^2\text{-}b^2)\ MC^2 = 0$.

Demostrar que E contiene al centro de la circunferencia circunscrita y al centro de gravedad de ABC. Deducir un tercer punto de este conjunto. (p. 257)

Prépa Maths (1998) Hachette Superieur

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Tomando coordenadas cartesianas en el plano si el punto *M* se expresa como *M(x,y)* la fórmula del problema se presenta como una ecuación algebraica de segundo grado. Observando que la suma de los coeficientes que dependen sólo de los lados del triángulo es nula, se puede concluir que el lugar geométrico de *M* es una recta; el *ensemble E* es una recta, que si pasa por el baricentro y el circuncentro del triángulo se trata de la recta de Euler.

La comprobación respecto al circuncentro es muy sencilla: las distancias *MX* son todas iguales al radio *R*, por tanto verifica la ecuación sin más que sacar factor común R^2.

Para el baricentro, sabiendo que la longitud de una mediana es $4m_a^2 = 2(b^2+c^2) - a^2$ y expresiones análogas para las otras dos, sustituimos los valores *MX*, dos tercios de la mediana, por los de cada una de ellas. Un sencillo cálculo también nos demuestra que verifica la ecuación del lugar.

Por último, al tratarse de la recta de Euler, un tercer punto del lugar es el ortocentro *H*. ■