

Problema 667 de *triánguloscabri*. Demostrar que existe una infinidad de triángulos inscritos en una circunferencia de centro O que tienen el mismo ortocentro H , el mismo centro de gravedad G y la misma circunferencia de Euler

Ladegaillerie, Y.: Geometrie exercices corrigés pour le Capes de mathématiques.

Solución de Francisco Javier García Capitán

Es obvio que los triángulos con el mismo circuncentro O y el mismo ortocentro H tendrán también el mismo baricentro y la misma circunferencia de los nueve puntos.

En <http://mathworld.wolfram.com/MacBeathInconic.html> puede encontrarse una bibliografía sobre los triángulos que comparten el mismo circuncentro y ortocentro.

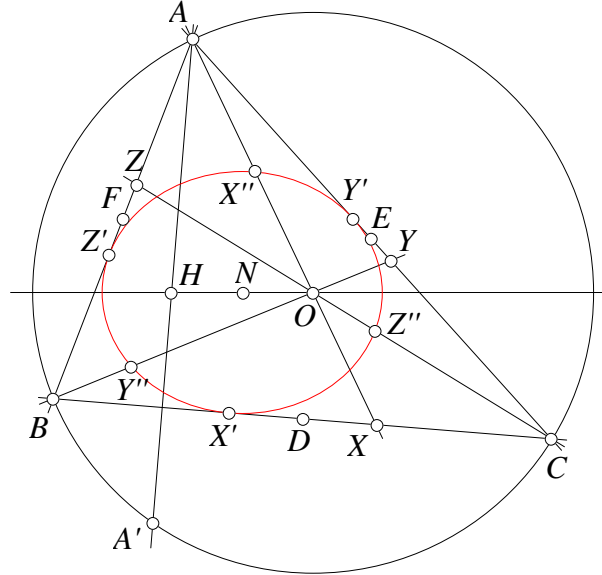
Partimos de una circunferencia (O) y una recta que pasa por O , que será la recta de Euler de todos los triángulos.

Marcamos un punto H sobre esa recta. H será el ortocentro. El punto medio N de HO será el centro de la circunferencia de los nueve puntos.

Para un punto A sobre (O) hallamos el segundo punto A' de intersección de AH y (O) . La mediatriz de $A'H$ corta en B y C a la circunferencia (O) .

Sean DEF el triángulo medial de ABC y XYZ el triángulo ceviano de O respecto de ABC . Sean X', Y', Z' los simétricos de X, Y, Z respecto de DEF y X'', Y'', Z'' los simétricos de X', Y', Z' respecto de N .

La cónica que pasa por los puntos $X', Y', Z', X'', Y'', Z''$ es la *cónica de MacBeath*.



Resaltamos que, por ejemplo, el punto X'' está sobre la ceviana AO , cumpliéndose además la relación

$$\frac{AX''}{X''O} = \frac{\cos A}{2 \cos A \cos B}.$$

Si tomamos H exterior a la circunferencia, la cónica será una hipérbola.

