

Problema 668, propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, Valladolid:

Sean ABC y $A'B'C'$ dos triángulos rectángulos en A y A' con bisectrices interiores $v_a = AD$ y $v_{a'} = A'D'$, con $n_a = BD$, $m_a = DC$, $n_{a'} = B'D'$ y $m_{a'} = D'C'$, respectivamente. Probar que:

$$aa'\sqrt{v_a v_{a'}} - bb'\sqrt{n_a n_{a'}} - cc'\sqrt{m_a m_{a'}} \geq 0.$$

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo:

Del teorema de la bisectriz interior en ABC , $bn_a = cm_a$, y la igualdad $n_a + m_a = a$, resultan $n_a = \frac{ca}{b+c}$ y $m_a = \frac{ab}{b+c}$; y análogamente para $A'B'C'$, $n_{a'} = \frac{c'a'}{b'+c'}$ y $m_{a'} = \frac{a'b'}{b'+c'}$.

Además,

$$\frac{bc}{2} = [ABC] = [ADC] + [ABD] = \frac{1}{2}bv_a \sin \frac{A}{2} + \frac{1}{2}cv_a \sin \frac{A}{2} = \frac{b+c}{2}v_a \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow v_a = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c}; \text{ y}$$

análogamente, $v_{a'} = \frac{\sqrt{2}b'c'}{b'+c'}$, siendo entonces la desigualdad a probar

$$aa'\sqrt{\frac{\sqrt{2}bc}{b+c} \frac{\sqrt{2}b'c'}{b'+c'}} \geq bb'\sqrt{\frac{ca}{b+c} \frac{c'a'}{b'+c'}} + cc'\sqrt{\frac{ab}{b+c} \frac{a'b'}{b'+c'}},$$

o equivalentemente, $aa'\sqrt{2bcb'c'} \geq bb'\sqrt{cac'a'} + cc'\sqrt{aba'b'}$, o bien

$$2a^2bca'^2b'c' \geq b^2cab'^2c'a' + abc^2a'b'c'^2 + 2bcb'c'\sqrt{a^2bca'^2b'c'}, \text{ ó } 2aa' \geq bb' + cc' + 2\sqrt{bcb'c'},$$

$$\text{es decir, } 2aa' \geq (\sqrt{bb'} + \sqrt{cc'})^2 \quad (1).$$

Si se multiplican todos los lados de uno de los triángulos, digamos $A'B'C'$, por un mismo número λ , se tendría la desigualdad $2a\lambda a' \geq (\sqrt{b\lambda b'} + \sqrt{c\lambda c'})^2$, o sea, $2\lambda aa' \geq (\sqrt{\lambda})^2 (\sqrt{bb'} + \sqrt{cc'})^2$, que es equivalente a la desigualdad (1). Ello implica que podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $a = a'$, con lo cual (1), o bien $2a^2 \geq (\sqrt{asenBa'senB'} + \sqrt{asenCa'senC'})^2$, pasa a ser $\sqrt{senBsenB'} + \sqrt{senCsenC'} \leq \sqrt{2} \quad (2).$

De las desigualdades de las medias geométrica y aritmética y de Jensen para la función seno, que es estrictamente cóncava en $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, resulta

$$\begin{aligned}\sqrt{\sin B \sin B'} + \sqrt{\sin C \sin C'} &\leq \frac{1}{2}(\sin B + \sin B') + \frac{1}{2}(\sin C + \sin C') = \frac{1}{2}(\sin B + \sin C) + \frac{1}{2}(\sin B' + \sin C') \\ &\leq \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) + \sin\left(\frac{B'+C'}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2},\end{aligned}$$

que es la desigualdad (2) que queríamos probar.

Además, se obtiene la igualdad si y sólo si se verifica en la desigualdad de las medias geométrica y aritmética, o sea, $\sin B = \sin B'$ y $\sin C = \sin C'$, y en la desigualdad de Jensen, es decir, $B = C$ y $B' = C'$.

Queda así probada la desigualdad y que la igualdad se cumple si y sólo si ABC y $A'B'C'$ son triángulos rectángulos isósceles.