

Problema 668

Solución de Juan Bosco Romero Márquez

Sean $T = ABC$ y $T' = A'B'C'$ dos triángulos rectángulos en A y A' , y de lados $a > b \geq c$, $a' > b' \geq c'$, y con bisectrices interiores $v_a, v_{a'}$ como cevianas, y con segmentos determinados por éstas, sobre los lados BC , y $B'C'$, $m_a, m_{a'}$, y $n_a, n_{a'}$ correspondientes a los lados b, c y b', c' , con $a = m_a + n_a$, $a' = m_{a'} + n_{a'}$, respectivamente.

Probar que :

$$aa'\sqrt{v_a v_{a'}} - bb'\sqrt{n_a n_{a'}} - cc'\sqrt{m_a m_{a'}} \geq 0.$$

Solución,.

Recordando el valor de las bisectrices y segmentos determinados por ellas, sobre las hipotenusas de los triángulos T y T' , tenemos que :

$v_a = \frac{\sqrt{2}bc}{b+c}$, $m_a = \frac{ab}{b+c}$, $n_a = \frac{ac}{b+c}$, y similares expresiones para T' , que sustituidas en la expresión dada, y además, $a^2 = b^2 + c^2$, $a'^2 = b'^2 + c'^2$, se tiene que si :

$$\begin{aligned} X &= aa'\sqrt{\frac{2bcb'c'}{(b+c)(b'+c')}} - bb'\sqrt{\frac{aacc'}{(b+c)(b'+c')}} - cc'\sqrt{\frac{aa'bb'}{(b+c)(b'+c')}} = \\ &= \sqrt{\frac{abca'b'c'}{(b+c)(b'+c')}}(\sqrt{2aa'} - \sqrt{bb'} - \sqrt{cc'}) = K(2aa' - (bb' + cc' + 2\sqrt{bcb'c'})) \text{ (llamando,} \end{aligned}$$

K , a toda la expresión obtenida, al multiplicar numerador y denominador por $\sqrt{2aa'} + \sqrt{bb'} + \sqrt{cc'}$).

De otra parte al hacer la agrupación que sigue, y multiplicar por sus conjugados, obtenemos que :

$$X = K((aa' - bb' - cc') + (aa' - 2\sqrt{bcb'c'})) = K(P + Q), \text{ donde}$$

$$P = aa' - (bb' + cc'), \text{ y } Q = aa' - 2\sqrt{bcb'c'}, \text{ y veamos ahora sus signos de } P \text{ y } Q :$$

y, al multiplicar por los conjugados de P $P' = aa' + bb' + cc'$, y de Q ,

$Q' = aa' + 2\sqrt{bcb'c'}$, obtenemos :

$$X = K\left(\frac{(aa')^2 - (bb' + cc')^2}{aa' + bb' + cc'} + \frac{(aa')^2 - 4bcb'c'}{aa' + 2\sqrt{bcb'c'}}\right)$$

$$P = \frac{(b^2 + c^2)(b'^2 + c'^2) - (bb' + cc')^2}{aa' + bb' + cc'} = \frac{(bc' - b'c)^2}{aa' + bb' + cc'} \geq 0, \text{ con la igualdad } \Leftrightarrow bc' = b'c.$$

$$Q = \frac{(b^2 + c^2)(b'^2 + c'^2) - 4bcb'c'}{aa' + 2\sqrt{bcb'c'}} = \frac{(bb' - cc')^2 + (bc' - b'c)^2}{aa' + 2\sqrt{bcb'c'}} \geq 0, \text{ con la igualdad } \Leftrightarrow$$

$$bc' = b'c \text{ y } bb' = cc'.$$

Desde aquí, tenemos : $X \geq 0$.