

Problema propuesto por Juan-Bosco Romero Márquez, Departamento de Álgebra, Geometría, y Topología, Universidad de Valladolid, Valladolid.
Problema 668.

Sean $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$ dos triángulos rectángulos en A y A' de lados $a > b \geq c$, $a' > b' \geq c'$ y con bisectrices interiores $v_a = \overline{AD}$, $v_{a'} = \overline{A'D'}$, con $n_a = \overline{BD}$, $m_a = \overline{DC}$, $n_{a'} = \overline{B'D'}$, respectivamente.

Probar que : $a \cdot a' \sqrt{v_a \cdot v_{a'}} - b \cdot b' \sqrt{n_a \cdot n_{a'}} - c \cdot c' \sqrt{m_a \cdot m_{a'}} \geq 0$

Solución de Ricard Peiró:

La bisectriz d'un triángulo mesura $v_a = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} = \frac{bc}{b+c} \sqrt{2}$, $v_{a'} = \frac{b'c'}{b'+c'} \sqrt{2}$.

Aplicando la propiedad de la bisectriz :

$$n_a = \frac{ac}{b+c}, m_a = \frac{ab}{b+c}, n_{a'} = \frac{a'c'}{b'+c'}, m_{a'} = \frac{a'b'}{b'+c'}.$$

$$\text{Probar } a \cdot a' \sqrt{v_a \cdot v_{a'}} - b \cdot b' \sqrt{n_a \cdot n_{a'}} - c \cdot c' \sqrt{m_a \cdot m_{a'}} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$a \cdot a' \sqrt{\frac{bc}{b+c} \sqrt{2} \cdot \frac{b'c'}{b'+c'} \sqrt{2}} - b \cdot b' \sqrt{\frac{ab}{b+c} \cdot \frac{a'b'}{b'+c'}} - c \cdot c' \sqrt{\frac{ac}{b+c} \cdot \frac{a'c'}{b'+c'}} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{aa'bb'cc'}}{\sqrt{(b+c)(b'+c')}} (\sqrt{2aa'} - \sqrt{bb'} - \sqrt{cc'}) \geq 0. \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{aa' \sqrt{bb'cc'}}{\sqrt{(b+c)(b'+c')}} \left(\sqrt{2} - \sqrt{\frac{bb'}{aa'}} - \sqrt{\frac{cc'}{aa'}} \right) \geq 0. \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{\frac{bb'}{aa'}} - \sqrt{\frac{cc'}{aa'}} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2} - \sqrt{\sin B \cdot \sin B'} - \sqrt{\cos B \cdot \cos B'} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{\sin B \cdot \sin B'} + \sqrt{\cos B \cdot \cos B'} \leq \sqrt{2}.$$

$$\sin B \geq 0, \sin B' \geq 0$$

Aplicando la desigualdad entre la media aritmética y la geométrica:

$$\frac{\sin B + \sin B'}{2} \geq \sqrt{\sin B \cdot \sin B'}.$$

Análogamente:

$$\frac{\cos B + \cos B'}{2} \geq \sqrt{\cos B \cdot \cos B'}.$$

$$\sqrt{\sin B \cdot \sin B'} + \sqrt{\cos B \cdot \cos B'} \leq \frac{\sin B + \sin B'}{2} + \frac{\cos B + \cos B'}{2}$$

$$\sqrt{\sin B \cdot \sin B'} + \sqrt{\cos B \cdot \cos B'} \leq \frac{\sin B + \cos B}{2} + \frac{\sin B' + \cos B'}{2}.$$

Transformando productos en productos:

$$\sqrt{\sin B \cdot \sin B'} + \sqrt{\cos B \cdot \cos B'} \leq \frac{\sin B + \cos B}{2} + \frac{\sin B' + \cos B'}{2} = \frac{\sqrt{2} \cos(45^\circ - B)}{2} + \frac{\sqrt{2} \cos(45^\circ - B')}{2}$$

$$\sqrt{\sin B \cdot \sin B'} + \sqrt{\cos B \cdot \cos B'} \leq \sqrt{2}, \text{ la igualdad se alcanza cuando } B = B' = 45^\circ.$$