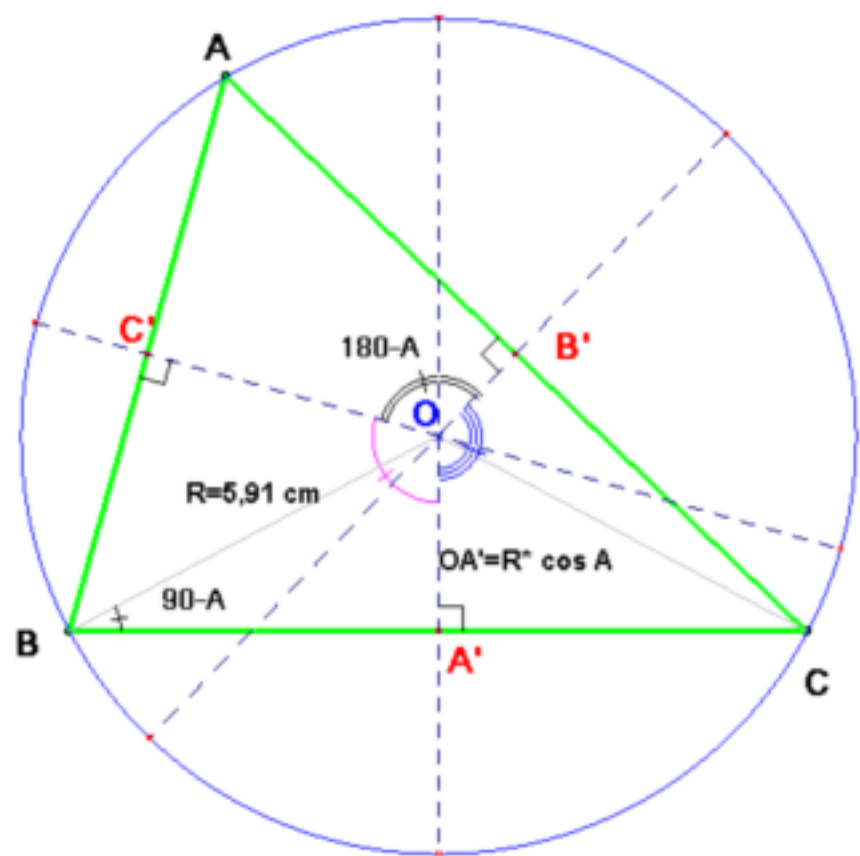


Problema 669

24.- Problema. Se da una circunferencia C y tres diámetros A_1 , A_2 y A_3 . Construir un triángulo inscrito en C tal que tenga a A_1 , A_2 y A_3 como mediatrices.

Azis El Kacimi Alaoui (2012): Geometría euclídea elemental. (p. 79).

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Los ángulos que forman los tres diámetros –las mediatrices- en el circuncentro son suplementarios de los del triángulo. Por tanto, dar sus mediatrices equivale a dar la medida de sus ángulos. Con el radio de la circunferencia podemos construir fácilmente el triángulo.

Se tiene $OA' = R \cdot \cos A$, y análogamente los demás. Es fácil construir este segmento. Fijada la posición del punto A' , punto medio de BC , la construcción es inmediata.

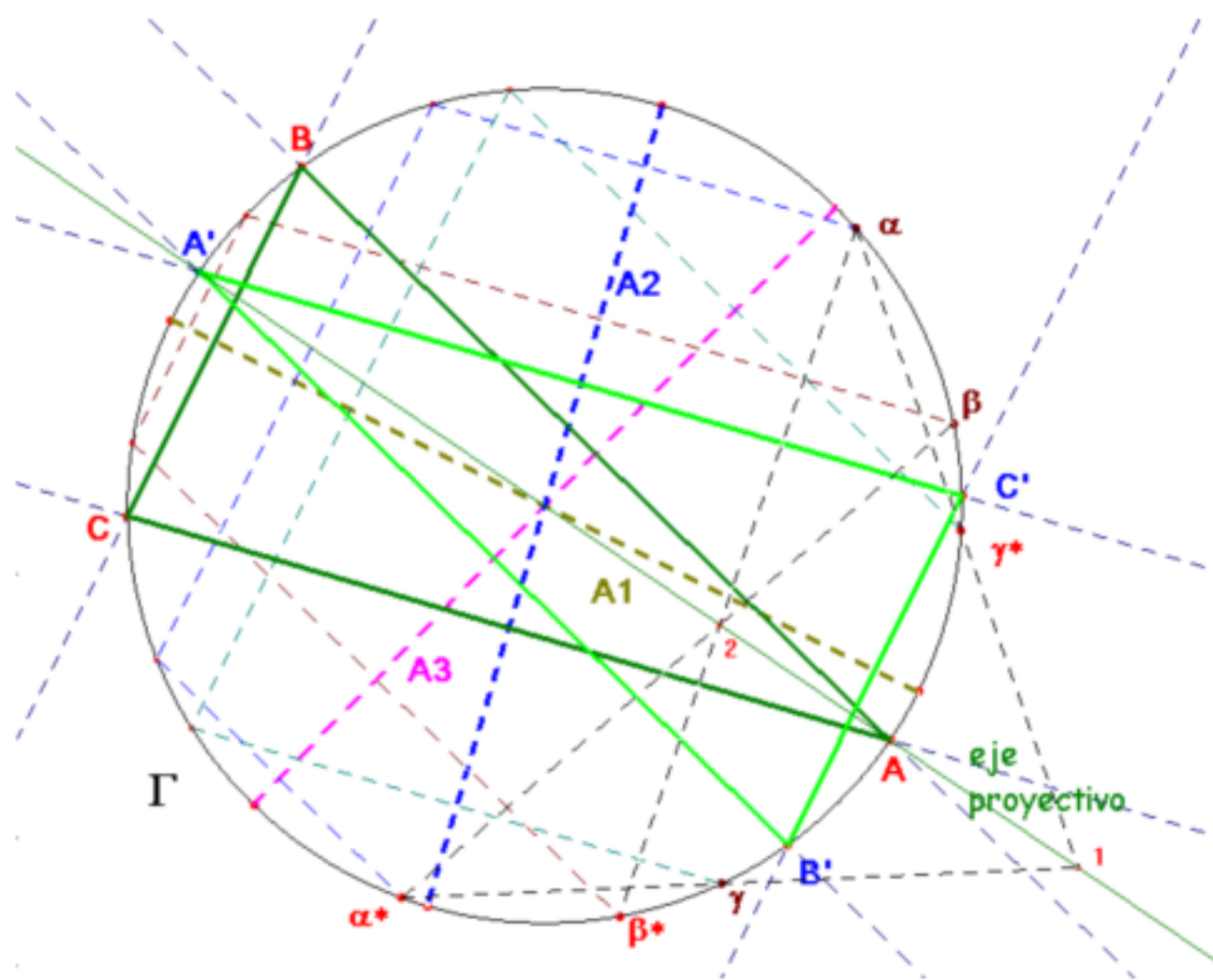
Obtenida una solución se obtiene una segunda sin más que aplicar a la primera una simetría de centro el circuncentro. Así pues hay dos soluciones.

Otro modo de enfocar el problema es considerar una aplicación de la circunferencia en sí misma donde cada punto se va proyectando en ella según direcciones perpendiculares a los tres diámetros. Cuando topemos con un vértice del triángulo a construir, su proyección final será el propio punto. Esto es, buscamos los puntos dobles de esa proyectividad.

Si se elige arbitrariamente un punto α como vértice, después de proyectarlo en la circunferencia según las direcciones perpendiculares a A_1 , A_2 y A_3 se obtiene un punto α^* , en general diferente del inicial.

$$\pi: (\alpha, \beta, \gamma) \rightarrow (\alpha^*, \beta^*, \gamma^*)$$

Los puntos dobles de la proyectividad π resuelven el problema.



Para hallarlos construimos el eje proyectivo, definido por las intersecciones de las rectas μv^* con $\mu^* v$. Este eje corta a la circunferencia en los puntos dobles de la aplicación (A y A' en esta segunda figura).