

Problema 671

(c) Demostrar que cualquier triángulo equilátero se puede dividir en n triángulos equiláteros, para cualquier $n > 5$.

Solución de Fabiola Czwienczek, profesora de Matemática (jubilada). Turmero, Venezuela

Previamente, observemos la figura 1. Tenemos el segmento $\overline{AB}$, el cual se ha dividido en cuatro segmentos congruentes. Construyamos triángulos equiláteros cuyas bases sean los segmentos $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{EB}$, de tal manera que los vértices no dados de estos triángulos estén del mismo lado de la recta que contiene los puntos A y B (figura 2). Tracemos el segmento cuyos extremos son los puntos F e I, el cual es paralelo a $\overline{AB}$. Se forman tres nuevos triángulos equiláteros, los que vemos sombreados en la figura 3.

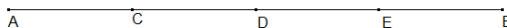


Figura 1

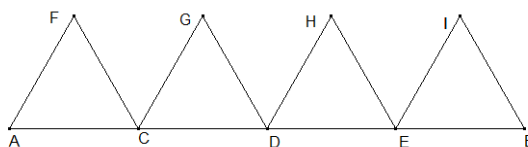


Figura 3

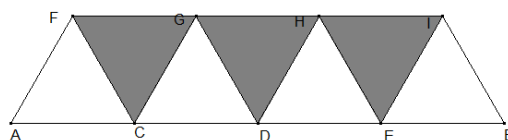


Figura 3

De esta manera, hemos construido $4 + 3 = 7$ triángulos equiláteros.

Si el segmento $\overline{AB}$ se divide en:

3 segmentos congruentes, se pueden construir $3 + 2 = 5$ triángulos equiláteros.

5 segmentos congruentes, se pueden construir $5 + 4 = 9$ triángulos equiláteros.

6 segmentos congruentes, se pueden construir $6 + 5 = 11$ triángulos equiláteros.

...

m segmentos congruentes, se pueden construir $m + (m - 1) = 2m - 1$ triángulos equiláteros.

Volvamos al problema. Sea $\triangle ABC$ un triángulo equilátero. Probemos que este triángulo puede dividirse en n triángulos equiláteros, para cualquier $n > 5$. Nótese que no se especifica que los triángulos sean congruentes dos a dos. Consideremos dos casos.

Caso 1: n es par

Si n es par y mayor que 5, entonces $n = 2t$, para algún entero $t > 2$. Dividamos el lado $\overline{AB}$ en t segmentos congruentes. Por lo discutido previamente, sabemos que esta división del segmento $\overline{AB}$ en t segmentos congruentes permite construir $2t - 1$ triángulos equiláteros. Sean D y E los puntos de $\overline{CA}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, tales que $AD = BE = AB/t$. Nótese que $\overline{DE}$ y $\overline{AB}$ son paralelos. Por tanto, $\triangle CDE$ es un triángulo equilátero. En total, hemos dividido el triángulo $\triangle ABC$ dado en $(2t - 1) + 1 = 2t = n$ triángulos equiláteros. En la figura 4 se muestra la construcción para $n = 10$. Como $10 = 2 \times 5$, el segmento $\overline{AB}$ se ha dividido en 5 segmentos congruentes.

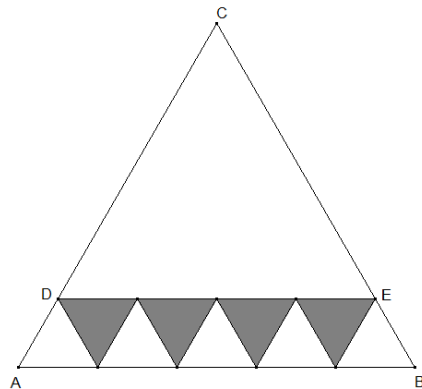


Figura 4

Caso 2: n es impar

Si n es impar y mayor que 5, entonces $n = 2k + 1$, para algún entero $k > 2$. Dividamos el lado $\overline{AB}$ en $k - 1$ segmentos congruentes. Sabemos que esta división del segmento $\overline{AB}$ en $k - 1$ segmentos congruentes permite construir $2k - 3$ triángulos equiláteros. Sean D y E los puntos de $\overline{CA}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, tales que $AD = BE = AB/(k - 1)$. Sean F , G y H los puntos medios de los segmentos $\overline{CD}$, $\overline{CE}$ y $\overline{DE}$, respectivamente. Los triángulos $\triangle DFH$, $\triangle FGH$, $\triangle HGE$ y $\triangle CFG$ son cuatro triángulos equiláteros. Resumiendo, hemos dividido el triángulo dado $\triangle ABC$ en $(2k - 3) + 4 = 2k + 1 = n$ triángulos equiláteros. En la figura 6 se muestra la construcción para $n = 13$ (como $13 = 2 \times 6 + 1$, el segmento $\overline{AB}$ se divide en $6 - 1 = 5$ segmentos congruentes). En la figura 7, para $n = 15$.

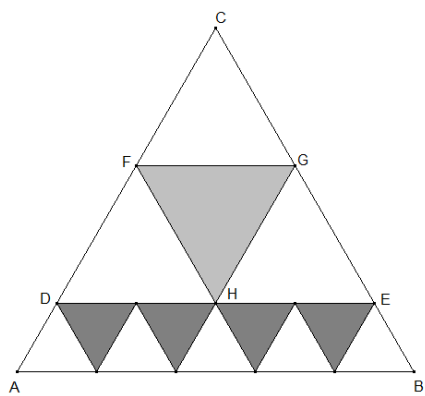


Figura 6

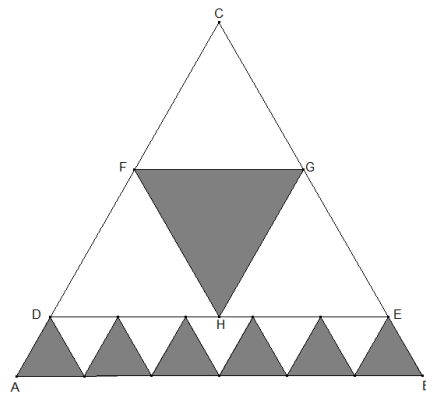


Figura 7