

Problema 672, propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, Perú:

Dado un triángulo ABC , sea D el punto medio de AC . Tenemos que $\angle ABD = 50^\circ$ y $\angle BCD = 40^\circ$. Hallar $\angle DBC$.

Solución de Bruno Salgueiro Fanego, Viveiro, Lugo:

Sea $\theta = \angle DBC$. La suma de los ángulos interiores de ABC es 180° , luego $\angle CAB = 90^\circ - \theta$.

Por el teorema de los senos en ABD y BCD , $\frac{AD}{\sin 50^\circ} = \frac{BD}{\sin(90^\circ - \theta)}$ y $\frac{DC}{\sin \theta} = \frac{BD}{\sin 40^\circ}$. Como

$AD = DC$, es $\frac{\sin 50^\circ}{\cos \theta} = \left(\frac{AD}{BD} = \frac{DC}{BD} = \right) \frac{\sin \theta}{\sin 40^\circ}$, luego $\sin \theta \cos \theta = \sin 40^\circ \cos 40^\circ$, o sea,

$\frac{1}{2} \sin(2\theta) = \frac{1}{2} \sin 80^\circ$ y como $90^\circ - \theta = \angle CAB > 0^\circ \Rightarrow 2\theta < 180^\circ$, resulta $\theta \in \{40^\circ, 50^\circ\}$.

Ambos casos son posibles; el caso $\theta = 40^\circ$ corresponde a un triángulo rectángulo en B y el caso $\theta = 50^\circ$ a un triángulo isósceles con ángulo en el vértice B igual a 100° .