

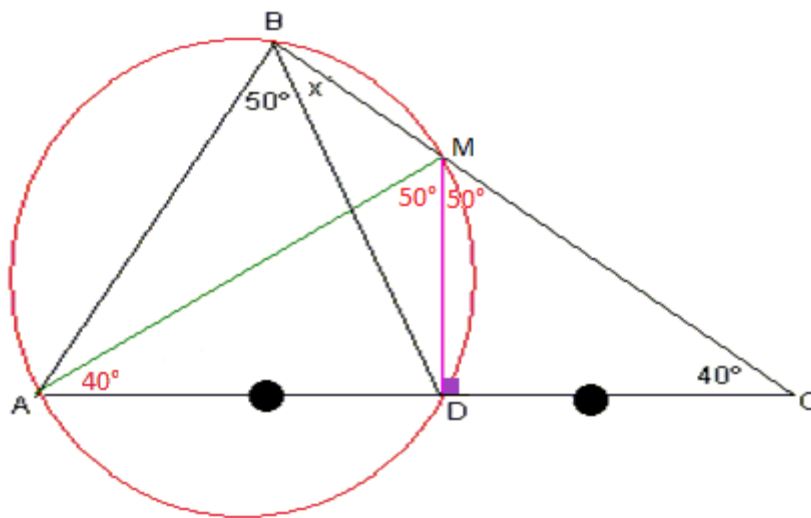
Propuesto por Julio A. Miranda Ubaldo, profesor de la Academia San Isidro (Huaral), de Perú
Problema 672

Dado un triángulo ABC, sea D el punto medio de AC. Tenemos que $\angle ABD = 50^\circ$ y $\angle BCD = 40^\circ$. Hallar $\angle DBC$.

Anónimo

Solución de Julio A. Miranda Ubaldo, profesor de la Academia San Isidro (Huaral), de Perú.

Primera Solución:



Desde D trazo la mediatriz DM (M en BC).

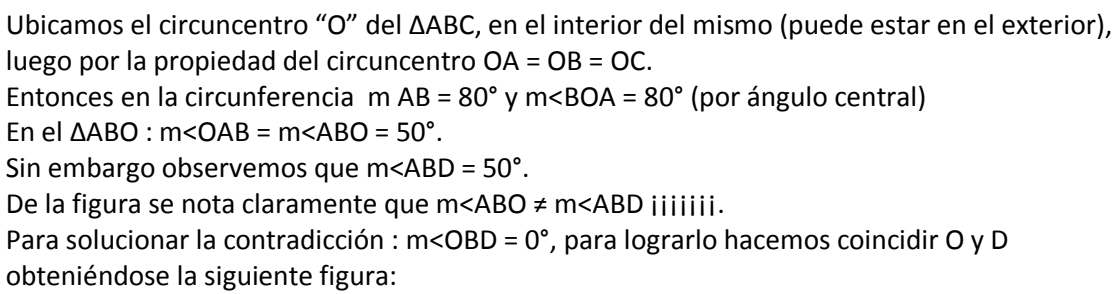
Unamos A con M, por la propiedad de la mediatriz $AM = MC$ por lo tanto $m\angle MAC = 40^\circ$ y $m\angle AMD = 50^\circ$.

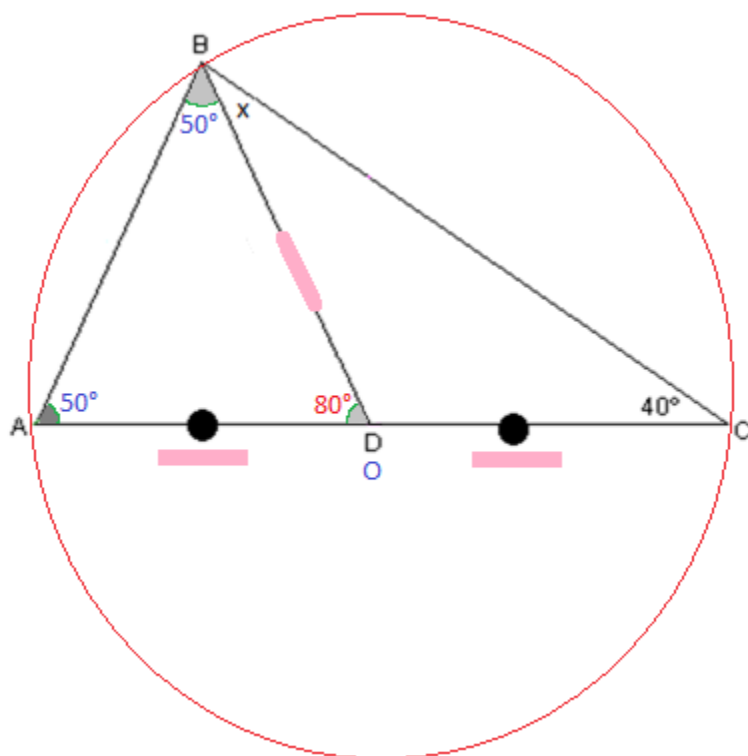
Se observa que el cuadrilátero ABMD es inscriptible debido a que: $m\angle ABD = m\angle AMD = 50^\circ$.

Luego en el mismo cuadrilátero: $x = 40^\circ$.

Se demuestra así mismo que el triángulo ABC es rectángulo (recto en B).

Segunda Solución:



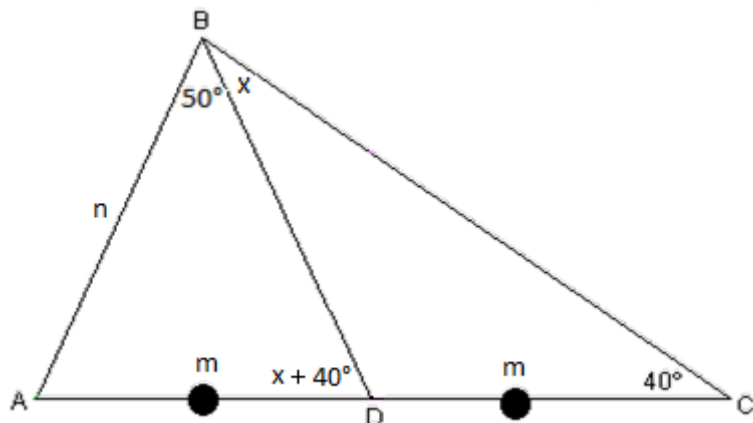


Como D es ahora el circuncentro del $\triangle ABC$: $DA = DB = DC$.

Además : $m\angle BAD = 50^\circ$ y $m\angle BDA = 80^\circ$

Por lo tanto en el $\triangle BCD$: $x = 40^\circ$

Tercera Solución:



Hagamos $AD = DC = m$ y $AB = n$

En el $\triangle ABD$, $m\angle D = 40^\circ + x$ y por la ley de los senos:

$$\frac{n}{\text{sen}(40^\circ + x)} = \frac{m}{\text{sen}50^\circ} \quad \text{Entonces :} \quad \frac{n}{m} = \frac{\text{sen}(40^\circ + x)}{\text{sen}50^\circ} \quad \dots\dots\dots(1)$$

En el $\triangle ABC$ por la ley de los senos

$$\frac{n}{\text{sen}40^\circ} = \frac{2m}{\text{sen}(50^\circ + x)} \quad \text{Entonces :} \quad \frac{n}{m} = \frac{2\text{sen}40^\circ}{\text{sen}(50^\circ + x)} \quad \dots\dots\dots(2)$$

Igualando (1) y (2)

$$\frac{\text{sen}(40^\circ + x)}{\text{sen}50^\circ} = \frac{2\text{sen}40^\circ}{\text{sen}(50^\circ + x)}$$

Resolviendo esta expresión trigonométrica:

$$\text{sen}(40^\circ + x)\text{sen}(50^\circ + x) = 2\text{sen}40^\circ \cdot \text{sen}50^\circ$$

$$\text{sen}(40^\circ + x)\cos(40^\circ - x) = 2\text{sen}40^\circ \cdot \cos40^\circ$$

$$\text{sen}(40^\circ + x)\cos(40^\circ - x) = \text{sen}80^\circ$$

Es fácil darse cuenta que **x = 40°**